



BIBLIOTHECA  
UNIV. JAGIELL.  
CRACOVENSIS

587336-  
-587337 -

Mag. St. Dr.

I

14408



587336-587337

Mag. St. Dr.



Abh. 75.259 -

# ALGEBRY

CZYLI

NAUKI O RACHUNKACH LITERALNYCH

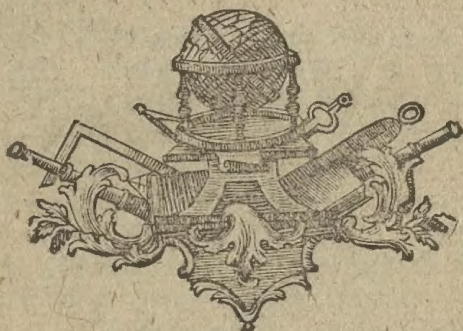
CZĘŚĆ DRUGA.

UŁOŻONA

PRZEZ

X. ANDRZEJA SEBASTYANA USTRZYCKIEGO

*Scholarum Piarum.*



w WARSZAWIE 1781.

---

w Drukarni J. K. Mei i Rzeczypospolitey  
u XX. *Scholarum Piarum.*

**S. Wodnicki**



587337

一



W S T Ę P  
D O T E Y C Z Ę S C I.



Nie zaraz, iak się ziawiła w Europie ALGEBRA, na wysokim doskonałości stopniu stała. Czasu trzeba było, żeby umiejętność Arabka od Europeyczyków dobrze zrozumiana, dopieroż lepiej ułożona, i wydoskonalona być mogła. Wprowadzona od Wiety, chodziła długo manowcami za niewiadomym drogi przewodnikiem swoim, błądziła nie raz i nie w iednym miejscu, ani mogła zayść daleko, nie mając ieszcze potrzebnych światel, któreby ją prowadziły. Nierychło Tomasz Hariot początkowe iey prawidła przepisał, mnieysze litery na miejscu więkzych osadził, mnożenie ilkości łączeniem liter wyraził, i wyższe stopnie niezgrabnie układać zaczął. Trzeba było poczekać Kartezego, żeby ją okrzesał, wykształcił,



cił, objaśnił, wyżej posunął, i przydatniejszą uczynił. Temu szczęśliwemu dowcipowi Algebra winna wzrost swój i ulepszenie zofobliwą zdatnością do Geometrii. Przecież i tak jeszcze daleka była od tej doskonałości, do której przemyślem i pracą dwóch nieporównanych Mężów w późniejszym czasie zbliżona. Newton i Leybnicy dzielą wielkopomną chwałę w nagrodzie za tak pożyteczną pracę. Należałby być pewnie do tego dzieła i Robert Hook, który znaczną część wieku swego łożył na dochodzeniu rzeczy przyrodzonych, gdyby była śmierć niewczesna ośnowy dzieł Jego wraz z życiem nie przerwała. Przedsięwziął był ten dowcipny Anglik ułożenie Algebry Filozoficznej, któraby mogła służyć za instrument do odkrywania prawd Fizycznych w przyrodzeniu zagrzebanych, a kawałki dzieł po nim pozostałych i między dziełami Rycharda Walies dochowanych żałować każą równie Pisarza, iak pism Jego w samym biegu zgaśłych. (\*) Luboć i ta sama Algebra, której Filozofia z Matematyką ku wielorakiemu społeczeństwu ludzkiego pożytkowi dziś używa, tak jest wysoka w stopniach swoich, tak obszerna w podziałach swoich, iż piszącemu o niej bardziej o skróceniu dawnych i późniejszych wynalazków, niż o przydaniu wcale nowych przemyślać należy, zwłaszcza gdy  
kto

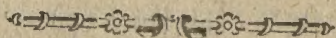
---

(\*) *Dictionaire Universel de Mathematique* Tom: I.  
pag: 18.

kto pisze dla Narodu, który z początkami tej umiejętności nie dobrze jeszcze oswoił się, a który nie smakuje sobie w żadney rzeczy bądź naypożyteczniejszey, skoro suchey i zabawną ciekawością niezaprawney. Dla tych naybardzię przyczyn Część ta Druga Algebry nie postąpi wyżej nad czwarty stopień w rezolwowaniu składanych Zagadnień, czyli Problematów osobliwie takich, które z wyższego stopnia na niższe obrócić się nie dadzą, opuści rachunki mniejszey wagi, a działania zbyt długiego i uprzykrzonego, lekko tylko, i nie pierwéy dotknie rachunku ściennego, aż potrzeba przycisnie, zacznie pierwéze Rozdziały od wykładu wyrazów, żeby się w dalszem przekładaniu zrozumialszą stała, i nie miała potrzeby, tam się ze słów tłumaczyć, gdzie z rzeczy samey przyidzie, a rozwodząc się obszerniey nieco z rachunkiem wykładniczym, zbliży się do zamierzonego celu, którym jest ułatwienie naywiększey w tej Części trudności, to jest: redukcyi pomiarów wyższostopniowych, azatem rezolucyi wszelkiego rodzaju Zagadnień. Pominie atoli szczególne Ziemiomiernicze Zagadnienia, acz do ich rezolwowania naypierwéy i naybardzię przysposabia; zostawiając to działanie Geometrii iako istotnie do iey zamiaru należne, a oszczędzając znaczny kosztu na druk i rznięcie figur nieuchronnie potrzebnego, na który Pisarzów podobnych dzieł zazwyczaj nie stać.

ROZ-





## R O Z D Z I A Ł I.

## O RACHUNKU WYKŁADNICZYM.

§ I. Wykład wyrazów, do zrozumienia  
tey Części potrzebnych.

**R**achunek Wykładniczy, *Calculus Exponentialis*, w Algebrze nazywa się ten, który się przez wykładników, *Exponentes*, odprawuje. Co zaś jest wykładnik, w początkach Pierwszey Części tey Nauki dostatecznie wyłożyło się. Dokładniejszy atoli wyłuszczenie do tey Części należy. Przeto:

I. Wiedzieć trzeba: że ilkość każda, np: a sama przez siebie rozmnożona czyni aa, czyli krótszym sposobem od Kartezego wynalezionym wyrażając:  $a^2$ , i nazywa się Czworogranem, *quadratum*, czyli drugim stopniem, *2da potestas*, a wymawia się a do drugiego stopnia wyniesione, albo krócey: a do 2giego; samo zaś a, które przez siebie mnożyło się, nazywa się ścianą, *latus*, pierwiastkiem, *radix*, pierwszym stopniem, *prima potestas*. Ten sam znowu czworogran aa albo  $a^2$  będzie przez ścianę swoją to jest przez a rozmnożony, wypadnie aaa, czyli  $a^3$ , czyli a do 3ciego, to jest: sześciogran, *cubus*, albo 3ci stopień, *3tia potestas*. Jeżeli znowu sześciogran ten  $a^3$  rozmnożony będzie przez tęż ścianę a, wyidzie

aaaa

aaaa czyli  $a^4$ , czyli a do 4tego, to iest: dwuczworogran, *quadrato quadratum*, albo czwarty stopień, *quarta potestas*. Jeżeli jeszcze i  $a^4$  rozmnożone zostanie przez swą ścianę a, będzie aaaaa, czyli  $a^5$  to iest: czworogrannofześcio-  
gran, *quadrato-cubus*, albo piąty stopień. A jeżeli i ten jeszcze stopień rozmnoży się przez a, wypadnie aaaaaa czyli  $a^6$ , to iest: dwufześcio-  
ściogran, *cubo-cubus* albo stopień szósty, i tak daley wypadać mogą 7my, 8my, 9ty, 10ty i dalsze ieszcze stopnie, a tym sposobem zrobi się szereg terminów równowzględnych:  
 $a^1. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. a^7. a^8. a^9. a^{10}. a^{11}. i t. d.$

Takie tedy liczby ilkościom zwierzchu przypisane Wykładnikami się dlatego nazywają, iż wykładają, do którego stopnia ilkość iest wyniesiona, a razem pokazują, które miejsce. taż ilkość ma trzymać w liczbie terminów równowzględnych, między którymi równowzględność zachodzi Geometryczna co do liter, bo ile razy 1. mieści się w a, tyle razy a pierwsze mieści się w drugim, drugie w trzecim *i t. d.* Arytmetyczna zaś co do Wykładników, iako przez się oczywista.

II. Wykładniki rzeczzone nie koniecznie liczbą wyrażają się; mogą się wyrażać literą np:  $a^m, a^n, a^r i t. d.$ , a te wykładnikami powszechnemi albo nieokreślonymi nazywają się, które określić, czyli do stopnia, którego warunki zagadnienia wyciągają, obrócić można, np: jeżeli  $m = 3$ , będzie:  $a^m = a^3. i t. d.$



III. Trafia się także : że ilkość za wykładownika nie całkowitą ma liczbę , lecz łomaną ,  
np:  $a\frac{1}{2}$ ,  $a\frac{1}{4}$ , i t. d, a ten łomany wykładownik wyraża ścianę tego łtopnia , który przez mianownik a ułomka iest oznaczony, i tak  $a\frac{1}{2}$  wyraża ścianę zgiego łtopnia,  $a\frac{1}{4}$  wyraża ścianę zciego łtopnia ; łtopnie zaś takie niedołkonafemi się nazywają, *potestates imperfecte*, i to łamo znaczą, co  $\sqrt[2]{a}$ ,  $\sqrt[3]{a}$ ,  $\sqrt[4]{a}$ ,  $\sqrt[5]{a}$ , które znaki łciennemi czyli radykalnemi nazywają się, *signa radicalia*.

IV. Miewają iefzcze ilkości przypifanego łobie wykładownika z znakiem odciążnym  $\frac{\text{---}}{\text{---}}$ ,  
np:  $\frac{a}{2}$ ,  $\frac{a}{4}$ ,  $\frac{a}{8}$ . Wykładownik ten znaczy iedność podzieloną przez ilkość wyniesioną do łtopnia tymże łamym wykładownikiem naznaczonego, i tak  $\frac{a}{2}$  iedno iest, co  $\frac{1}{2}a$ ;  $\frac{a}{4}$  iedno iest, co  $\frac{1}{4}a$ ;  $\frac{a}{8}$  iedno, co  $\frac{1}{8}a$ . Gdyby bowiem taka

np: trafiła się frakcyja  $\frac{aaaa}{aa}$ , redukując ją czyli mając tak w łiczniku, iako w łmianowniku aa, zoftafaby w łmniejszyŁ terminach fra-

kcyja  $\frac{aa}{1}$  czyli  $a^2$ , albo łkracając i ten wyraz a, iako się mówiŁo w CzęŁci I. o dzieleniu ilkoŁci.

V. Trafia się nakoniec : że ilkoŁć zamiast  
wy-

wykładnika ma 0, *np*:  $a^0$ , z którym równa się jedności, co tak okazuję. Gdybym  $a^2$  podzielił przez  $a^2$ , wieloraz byłby  $= a^0$ , gdyż, przez Przepis na Wykładników dany w Części I. na kar: 37, odciągnąwszy jednego Wykładnika od drugiego równego, nic nie zostaje, albo co na jedno wyidzie, o zostaje, a zatem nowym Wykładnikiem ilkości  $a$ , może być 0. A że  $a$ , w  $a$ , mieści się raz, więc  $a^0 = 1$ . Wykładnika takiego używanie bywa w Geometryczney proporcji zaczynającej się od jedności *np*: w téj; 1, 2, 4, 8, gdzie za liczby zakładając litery, będzie:  $a^0 = 1$ ,  $a^1 = 2$ ,  $a^2 = 4$ ,  $a^4 = 8$ .

VI. Ponieważ zaś rachunek wykładniczy zamykać w sobie ma wyciąganie ścian dla wykładników łomanych, czyli stopniów niedołączonych pod liczbą III. opisanych, wiedzieć zatem należy: wieloraka jest ściana, i jakim się znakiem wyraża. Ściana albo iwszy stopień w porównaniu do stopniów wyższych może być rozmaita, to jest: w porównaniu do czworogrannu czyli 2giego stopnia bywa czworogranna, *radix quadratica*, czyli drugostopniowa, taka jest ściana  $a$  w porównaniu do  $a^2$ , w porównaniu zaś do sześciogrannu, czyli 3giego stopnia, jest trzeciogranna, *cubica*, czyli trzeciostopniowa, w porównaniu znowu do 4tego stopnia, nazywa się czwartostopniowa, *i t. d.* Znak ściany jest ten  $\sqrt{\quad}$ , wśród którego kładzie się liczba stopień wyrażająca,

to



to jest: liczba 2, mali być ściana czworogranna, lubo ta częścicy się opuścza, liczba 3, jeśli będzie sześciogranna, a jeśli nieokreślona; kładzie się m lub n. Ilkość podobnym znakiem uprzedzona nazywa się ścienną czyli radykalną, *quantitas radicalis*, a liczba albo litera wśród ściennego znaku napisana nazywa się wykładnikiem ściany, *exponens radicis*. np:  $\sqrt[3]{ab^2}$  jest ilkość radykalna przez wykładnika swego 3, wyrażająca ścianę sześciogranną ilkości  $ab^2$ .

VII. Nakoniec przypomnieć tu krótko należy, co się w iwyżey części o dodawaniu, odcinaniu, mnożeniu, i dzieleniu ilkości mających wykładników mówiło, to jest: że się takich ilkości współczynniki tylko dodają, i odcinają, kiedy są sobie podobne, kiedy zaś niepodobne, dodanie ich i odcinanie znakami się tylko wyraża, tak  $a^2 + 3a^2 = 4a^2$ .  $3a^2 - a^2 = 2a^2$ . Lecz  $a^2 \times 3b^2 = 3a^2b^2$ ;  $a^2 - 3b^2 = a^2 - 3b^2$ . i t. d. W mnożeniu zaś ilkości wykładniki dodają się, a w dzieleniu odcinają, np:  $a^2 \times a^2 = a^4$ ,  $a^4 : a^2 = a^2$  i t. d.

§ II. Jak ilkość pojedyncza, monomia, niższego wykładnika czyli stopnia wynosi się do wyższego danego stopnia?

Ilkość pojedyncza mająca się wynieść do iakiego stopnia, albo się z iedney albo z kilku

ku liter składa, i znowu albo ma współczyn-  
nika swego, albo nie ma.

1. Jeżeli jest jedną literą wyrażona bez wyraźnego współczynnika, a z wyraźnym wykładnikiem, łatwo się wynieść do danego stopnia, rozmnożywszy iey wykładnika przez wykładnika danego, produkt będzie szukanym stopniem, np: mam  $a^2$  wynieść do 3 stopnia, więc gdy rozmnożę 2 przez 3, mieć będę  $a^6$ . Także wynosząc  $x^n$  do nieokreślonego stopnia  $m$ , będzie  $= x^{mn}$ . Wynosząc zaś  $x^n$  do określonego stopnia np: do 2giego lub 3ciego, będzie  $x^{2n}$  lub  $x^{3n}$  i t. d.

Jeżeli zaś ilkość pojedyncza, którą wynieść trzeba do danego stopnia, wyrażona jest dwiema lub więcej literami, wtenczas wykładnika każdej zobowią literę przez wykładnika danego trzeba rozmnożyć, np: ilkość  $ab$  do 2giego stopnia chcąc wynieść, mnożę domniemanego wykładnika i tak ilkości  $a$ , iak  $b$  przez danego wykładnika 2, będzie  $a^2b^2$  i t. d.

OKAZANIE. Każdy dany stopień ilkości pojedynczey może się wyrazić przez  $a^m$ . Tęgo zaś stopnia czworogran czyli 2gi stopień jest  $a^m \times a^m$ ; sześciogran zaś jest  $a^m \times a^m \times a^m$  i t. d. A że  $a^m \times a^m = a^{2m}$ , także  $a^m \times a^m \times a^m = a^{3m}$ , gdyż wykładniki w mnożeniu dodają się (iako się dopiero ostrzegło) więc jeżeli się  $a^m$  do 2giego stopnia wynosi, trzeba wykładnika  $m$ , rozmnożyć przez 2, jeżeli do 3go, przez 3, i tak wciąż, ażatem ogólnie chcąc ilkość wynieść do wyższego



go stopnia, dosyć jest, wykładnika iey przez danego wykładnika rozmnożyć.

III. Jeżeli ilkość pojedyncza mająca się wynieść do jakiego stopnia, ma współczynnik wyraznego, współczynnik ten do tegoż samego stopnia powinien być wyniesiony, do którego się wynosi ilkość, np. jeżeli  $2a^m$  wynieść trzeba do 2giego stopnia, będzie  $2 \times 2 = 4a^{2m}$ , jeżeli do 3ciego, będzie:  $4 \times 2 = 8a^{3m}$ .

IV. Jeżeli nakoniec ilkość pojedyncza frakcją jest wyrażona, wynieść się do wyższego stopnia, mianownika iey y licznika przez nią samą mnożąc: np:  $\frac{a}{z}$  wynosząc do 2giego stopnia, będzie  $\frac{a}{z} \times \frac{a}{z} = \frac{a^2}{z^2}$ , wynosząc do 3ciego, będzie  $\frac{a^3}{z^3}$  i t. d.

### § III. Jak dwukrotną ilkość do danego stopnia wynieść?

Nie tylko dwukrotne, lecz i wszystkie inne ilkości do wyższych iakichkolwiek stopniów wynoszą się przez mnożenie, iako się namieniło i przykładami pokazało w iwtżey Części, na karcie 27. Mam np: wynieść ilkość  $a+b$  do 2giego stopnia, mnożę  $a+b$ , przez  $a+b$  produkt  $a^2 + 2ab + b^2$  będzie czworogranem. Ten znowu czworogran mnożąc przez iego ścianę  $a+b$ , wypadnie sześciogran  $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  i tak daley, niższe stopnie przez też samą ścianę mnożąc, wypadną wyższe. W czem nie maż żadney trudności,

gdy

gdy dana ilkość wynosi się do 2giego, lub 3ciego stopnia, ale wynosić ją tym sposobem do wyższych nad 3ci stopniów, nie małaby była praca, i omyłka pędka. Przeto do takiego wynoszenia następujący sposób bywa używany. I. Niech ta sama ilkość  $a + b$  dana będzie do wyniesienia na 6ty stopień. Wynoszę naprzód 1wszą jej część do 6tego stopnia, będzie przez §. 2. 1wszy termin tego stopnia  $a^6$ . Za 2gi piszę toż samo  $a$  wyniesione do stopnia zmniejszonego iednością, i przez 2gą część, to jest przez  $b$  rozmnożone, będzie  $a^5b$ , czyli  $a^5b^1$ . Za trzeci termin położę toż  $a$ , wyniesione do stopnia znowu iednością zmniejszonego, rozmnożywszy go przez  $b$  wyniesione do stopnia 2giego, będzie  $a^4b^2$ , i tak daley, zmniejszając zawsze iednością w każdym terminie stopnie 1wszey części ilkości dwukrotnéy, a przeciwnie powiększając 2giey póty, póki nie stanę na terminie, w którymby było  $a$  pierwszostopniowe,  $b$  zaś sześciostopniowe. Tym sposobem rzeczona ilkość wyniesiona będzie do 6tego stopnia, ale ieszcze bez współczynników, i wyrazi się stopień ten albo tą iedną progressyą Geometryczną:  $a^6, a^5b^1, a^4b^2, a^3b^3, a^2b^4, ab^5, b^6$ , albo dwiema następującemi:

1wszą.  $a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a^1, 1.$   
2gą.  $1, b^1, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6.$

II. Zebym zaś współczynników tych stopniów



pniów wynalazł, tak postąpię, *naprzód*: wykładnika 1wżego terminu  $a^6$  kładę za współczynnika terminu 2giego, będzie  $6a^5$ . *ponowię*: mając współczynnika terminu 2giego 6, mnożę go przez wykładnika 1wżey iego części to jest: przez 5, a produkt dzielę przez 2, (to jest: przez liczbę terminów, których już wynaleziono są współczynniki) będzie współczynnikiem 3ciego terminu  $15a^4b^2$ . Znowu 15 rozmnożywszy przez 4, a produkt podzieliwszy przez 3, znawdę współczynnika 4tego terminu to jest:  $20a^3b^3$ . *i t. d.* Azatem złączysz wszystkie te terminy przez znak  $+$ , będzie zupełny z współczynnikiem stopień 6ty:  $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$ .

III. Jeżeli obydwie dwukrótny ilkości części, albo jedna z nich którakolwiek ma swego współczynnika, *np*: jeżeli wynieść trzeba do 3ciego stopnia  $a + 2b$ , *naprzód* wyniosę sposobem przepisany do 3ciego stopnia  $a + b$ , będzie  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ , potem współczynnika owego z położonego przed  $b$ , wyniosę do tegoż stopnia, do którego w każdym osobna terminie ilość  $b$  jest wyniesiona, i tak na 1wży termin, w którym jest  $b$ , będzie ten sam współczynnikiem to jest 2, na 2gi czworogran iego 4, na 3ci sześciogran 8. Nakoniec rozmnożę te stopnie 2, 4, 8 przez współczynniki terminów do 3ciego stopnia wyniesionych to jest: przez 3 i 1, i mieć należy

reście będą :  $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$ .  
Przyczyna tej roboty i całego składu wyższych stopniów wyłuszczone będzie w następującym Rozdziale.

IV. Co się tycze znaków , te wtenczas tylko powinny być dodatne , kiedy ilkość w pierwszym stopniu w obydwóch terminach była z znakiem  $+$  , gdy zaś 2ga iey część jest odciążna np:  $a - b$  , terminy , w których ściana  $-b$  wyniesiona jest do stopnia nieparzystą liczbą 1, 3, 5, wyrażonego , kłaść się powinny z znakiem odciążnym , inne zaś wszystkie z dodatnym , tak przerzeczoną dwukrotną ilkość  $a - b$  wyniosłszy do 3go stopnia , będzie  $a^3 - 3a^2b^1 + 3ab^2 - b^3$  dla wykładników nie parzystych  $b^1, b^3$ .

V. Czasem Algebryści nie wynoszą ilkości do danego stopnia , lecz znakami tylko okazują : iż wyniesione bydz mają , znaki zaś są te : liniyka ciągniona nad terminami ilkości daney do wyniesienia , i przy końcu liniyki po prawey iey stronie przypisany wyrażnie wykładnik ; i tak mając  $a + b$  wynieść do 2giego stopnia , piszą  $a + b$  , mając wynieść do 3ciego , piszą  $a + b$  , mając wynieść do stopnia nieokreślonego , piszą  $a + b$ . Idzie ztąd : iż chcąc takie ilkości do wyższego iefzcze wynieść stopnia , dosyć jest , i wszego ich wykładnika przez wyższego rozmnożyć np:  
 $a + b$ .

$$\begin{aligned} \overline{a+b}^{2 \times 3} &= \overline{a+b}^6, \text{ chcąc ie zaś mnożyć,} \\ \text{doląc ieść dodać ich wykładnikow, a chcąc} \\ \text{dzielić, doląc ieść odciągnąć tychże wykła-} \\ \text{dników, będzie więc: } \overline{a+b}^2 \times \overline{a+b}^3 &= \\ \overline{a+b}^5, \overline{a+b}^2 \overline{(a+b)}^5 &= \overline{a+b}^3. \end{aligned}$$

§ IV. Jak ułożyć ogólne prawidło do  
wynoszenia ilości wszelkich na wyższe sto-  
pnie?

I. Wziąwszy dwukrotną iaką ilość up:  
 $p+q$ , wynieść ią trzeba do nicokresłonego  
stopnia, dwie progresyie Geometryczne pisząc  
sposobem następującym:

$$\begin{aligned} &1^m. p^{m-1}. p^{m-2}. p^{m-3}. p^{m-4}. \text{ i t. d.} \\ &1. q^1. q^2. q^3. q^4. \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

Gdzie uważać potrzeba wykładników liczbami  
wyrażonych, które w terminach pier-  
wszey progresyji dlatego są odciążne czyli z  
znakiem —, że się tu tak iednością zmniej-  
szają, iak w zgłęy iednością zwiększają.

II. Rozmnożyć terminy poicdyńczo od  
lewey ręki brane progresyji pierwszey przez  
terminy drugiey, czyli połączyć iedne z dru-  
giemi, a przed tak złączorami znak + po-  
łożyć, wypadnie:  $p^m + p^{m-1}q + p^{m-2}q^2$   
 $+ p^{m-3}q^3 + p^{m-4}q^4. \text{ i t. d.}$

III. Ponieważ tu współczynników iest zte  
braku-



brakuie , żeby ich wyraleść , drugie dwie pro-  
gressiye z samych wykładników zrobić trzeba,  
będzie:

1wsza : m. m—1. m—2. m—3. m—4.

2ga : 1. 2. 3. 4. 5.

A te obrócić na frakcye , pierwszý terminy  
za liczników , a drugiý za mianowników kła-

dąc, będzie:  $\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5}$ .

Z tych frakcyi 1wsza  $\frac{m}{1}$  czyli m kładzie się  
za współczynnika 2giego terminu w ogólném  
prawidło ; potém toż samo m przez 2gą fra-  
kcyą  $\frac{m-1}{2}$  rozmnożone położy się za współ-  
czynnika 3ciego terminu , i będzie :  $m \times$   
 $\frac{m-1}{2}$  ; tenże sam współczynnik znówu rozmno-  
żony przez następującą frakcyą będzie współ-  
czynnikiem 4tego terminu i t. d ; a tak zu-  
pełnie wyrobione prawidło będzie :  $1 +$   
 $m p^{m-1} q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 + m \times \frac{m-1}{2}$   
 $\times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$   
 $p^{m-4} q^4$ .

Obaczmy już użycie tego prawidła w wy-  
noszeniu do wyższych stopniów ilkości na-  
przód dwukrotný , a potém wielokrotný , ale  
ostrzegam zawczasu : że w tém działaniu ró-  
wnie iako i w innych podobnych całą naukę  
o frakcyach Arytmetycznych przytomną w pa-  
męci mieć potrzeba.

I. Maiąc np: wynieść do 3ciego stopnia  
ilkość dwukrotną  $2ax + b^2$  , będzie  $p = 2ax$ ,  
B  $q =$

$q = b^2$ , stopień  $m = 3$ . Biorę prawidło i zakładam w niem za litery  $p, q, m$ , ich ceny to jest  $2ax$  za  $p$ ,  $+b^2$  za  $q$ ,  $3$  za  $m$ . Będzie naprzód:  $p^m = 8a^3x^3$ ; gdyż  $p^m$  pokazuje: że w cenie jego  $2ax$  ilości  $a, x$ , równie iako ich współczynnik  $2$  powinny być wyniesione do 3go stopnia, bo  $m = 3$ , będzie zatem  $2 \times 2 = 4 \times 2 = 8a^3x^3$ .

Pomtore:  $mp^{m-1}q = 12a^2b^2x^2$ , bo ponieważ  $m = 3$ , toć  $mp^{m-1}$  znaczy: że  $2ax$  ma być wyniesione do stopnia  $3-1$  to jest do 2giego, do tego więc stopnia  $ax$  i współczynnika  $2$  wyniołszy, a  $4a^2x^2$  przez  $3$  rozmnożywszy, gdyż  $m = 3$  przed  $p$  z mnożenia wypadło, będzie  $12a^2x^2$ ; nakoniec rozmnożywszy przez  $q = b^2$ , będzie:  $12a^2b^2x^2$ .

Potrzenie:  $mx^{\frac{m-1}{2}}p^{m-2}q^2 = 6ab^4x$ , ponieważ bowiem  $m = 3$ , toć  $p^{m-2}$  znaczy: że ilość  $2ax$  powinna w 1wlym stopniu zostać, bo  $3-2 = 1$ ,  $q^2$  zaś  $= b^2$  wynieść się powinno do 2giego stopnia, azatem będzie:  $2ax b^4$ , przydawszy zaś współczynnika, będzie  $3 \times 3^{\frac{3-1}{2}} = 3$ , a całą tę ilość rozmnożywszy przez  $2$  położone przed  $ax$ , będzie  $6ab^4x$ . Naostatek:  $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3}q^3 = b^6$ , gdyż zakładając za  $m$   $3$ , będzie  $3 \times 3^{\frac{3-1}{2}} = 3 \times 2 = 3 \times 1 = 3$ , toż samo znowu  $3$  rozmnożone przez  $3^{\frac{3-2}{3}} = 3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ , które się opuszcza, potem  $p^{m-3} = p^{3-3} = p^0 = 1$  przez Wykł: V, więc zostanie tylko  $q^3 = b^6$ , bo  $b^2$  wyniesione do 3ciego stopnia przez § II.  $= b^6$

$=b^6$ , przed którym i także się opuszcza, aza-  
tem ilkości dwukrotny  $2ax + b^2$  3ci stopień  
będzie:  $8a^3x^3 + 12a^2b^2x^2 + 6ab^4x + b^6$ .

II. Niech będzie trzykrotna ilkość  $a + b$   
 $-c$  mająca być wyniesioną do 4tego stopnia,  
będzie  $a = p$ ,  $b - c = q$ , stopień  $4 = m$ , aza-  
tem będzie naprzód:  $p^m = a^4$ , powtóre:  
 $m p^{m-1} q$ , ponieważ  $m = 4$ ,  $= 4a^4 - 1 =$   
 $4a^3$ ;  $q$  zaś załączone za  $b - c$  powinno się roz-  
mnożyć przez  $4a^3$ , będzie zatem przez przepisy  
dane na mnożenie w 1 części  $= 4a^3b - 4a^3c$ ,  
potrzebie:  $m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 = 4 \times \frac{4-1}{2} =$   
 $4 \times \frac{3}{2} = 4 \times \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6a^2$ ;  $q^2$  zaś będąc wy-  
niesione do 2go stopnia znaczy: że  $b - c$  po-  
winno się wynieść do tegoż stopnia, będzie  
zatem (przez § III.)  $b^2 - 2bc + c^2$ , a że jest  
złączone z  $p^{m-2}$ , ma się rozmnożyć przez  $6a^2$ ,  
a tak będzie  $6a^2b^2 - 12a^2bc + 6a^2c^2$ , po-  
czwarte:  $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{2} p^{m-3} q^3 = 4 \times \frac{4-1}{2} =$   
 $= 6 \times \frac{4-2}{2} = \frac{6}{1} \times \frac{2}{2} = \frac{12}{2} = 4a^4 - 3 = 4a$ ,  
 $q^3$  zaś wyraża: że  $b - c$  wynieść trzeba do  
3go stopnia, będzie więc przez § III.  $b^3 - 3b^2c$   
 $+ 3bc^2 - c^3$ , a ten stopień rozmnożywszy  
przez  $4a$ , wyidzie produkt:  $4ab^3 - 12ab^2c$   
 $+ 12abc^2 - 4ac^3$ ; popiąte:  $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{2} =$   
 $\times \frac{m-3}{4} p^{m-4} q^4 = a^4 - 4q^4 = a^0 q^4$ ;  $a^0$  zaś  $= 1$   
przez wykład V. więc zamiast  $q^4$  tylko kładzie  
się  $b - c$  wyniesione do 4tego stopnia,, aza-  
tem przez § III. będzie:  $b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2$   
 $- 4bc^3 + c^4$ . Doskonały tedy ilkości trzykrotny  
 $a + b - c$  stopień 4ty jest:  $a^4 + 4a^3b - 4a^3c$



$$\begin{aligned}
 &+6a^2b^2 - 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 - 12ab^2c \\
 &+ 12abc^2 - 4ac^3 + b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 \\
 &- 4bc^3 + c^4.
 \end{aligned}$$

III. Podobnym sposobem czterokrotne i inne wielokrotne ilkości wynosić się mogą, gdyby zaistniała potrzeba wynoszenia onych do wyższych stopniów, p zakładając za pierwsze dwa terminy, q zaś za drugie dwa, ale o tem więcej niż dotychczas. Kto już zechce doświadczyć: czy dobrze ilkość taką wyniósł do danego stopnia, niech z niego też samą ilkość to jest: ścianę wyciągnie, o czem w następującym Rozdziale, a jeżeli wyciągniona ściana będzie ilkością, która się do wyższego stopnia wynosiła, znak będzie niemylnego iey wyniesienia.

## ROZDZIAŁ II.

*O wyciąganiu ścian, a naprzód o składzie i rozbiórce wyższych stopniów Algebraicznych.*

**W**Yciągać ścianę z danego stopnia, nic innego nie jest; tylko wynaleść pierwszą ilkość, która sama przez siebie raz lub kilka razy rozmnożona stopień dany wyrobiła, np: wyciągnąć ścianę czworogranną czyli drugo-stopniową z stopnia  $a^2$ , jest to wynaleść ilkość  $a$ , która raz sama przez siebie rozmnożona uczyniła tenże czworogran  $a^2$ . Przeto czworograny, sześciograny i inne wyższe stopnie

stopnie iako z mnożenia powstaia, tak przez-  
dzielenie do swoich się początków czyli ścian  
wracają.

§ V. *Jak wyciągnąć ścianę z danego stopnia  
ilkości pojedynczey, quantitatis monomiae.*

Podzielić trzeba wykładnika danego sto-  
pnia przez wykładnika daney ściany, wieloraz  
będzie wykładnikiem szukaney ściany np: je-  
żeli z  $a^6$  wyciągać się ma ściana czworogran-  
na, ponieważ wykładnik tey ściany iest 2,  
więc podzieliwszy 6 przez 2, wieloraz 3 bę-  
dzie wykładnikiem ściany zapytaney, czyli ścia-  
na tego stopnia będzie  $a^3$ . Tym samym spo-  
sobem wyciągnie się i sześciogranna ściana  
z danego stopnia  $a^6$ , dzieląc 6 przez 3, a wie-  
loraz pisząc za nowego wykładnika, będzie  
zatem:  $a^6 \div 3 = a^2$ . Samo nawet  $a^2$ , podzieliwszy  
z przez 2, będzie  $= a^1$  czyli  $a$ . Podobnie w  
stopniach różnemi literami i wykładnikami  
wyrażonych np: w tym  $a^6b^3$  znajdzie się ścia-  
na sześciogranna, dzieląc wykładników 6 i 3  
przez 3, będzie  $a^6b^3 \div 3 = a^2b$ . Albowiem iako  
dana pojedyncza ściana wynosi się do danego  
stopnia, mnożąc jey wykładnika przez wykła-  
dnika stopnia danego, tak przeciwnie wycią-  
ga się też ściana z danego stopnia, wykładni-  
ka jęgo dzieląc przez wykładnika ściany da-  
ney. Jakoż tym sposobem wyciągniona ścia-  
na, gdyby się sama przez siebie znowu roz-  
mno-

mnożyła tak, iak się w 1wszym Rozdziale dzia-  
łało, wróciłby się tenże, co pierwéy był sto-  
pień np:  $a^3 \times^2 = a^6$ .

§ VI. Gdy dany stopień jest w wielu termi-  
nach czyli w ilkości wielokrotney, iak z  
niego wyciągnąć ścianę czworograną?

Zeby temu zapytaniu zadosyć uczynić,  
trzeba znać skład danego stopnia i na części  
go rozebrać, czyli trzeba krótko przełożyć:  
z jakich się składa części czworogran dwu-  
krotney ściany, *quadratum radicis binomie*, a  
z jakich czworogran ściany wielokrotney, *po-  
linomie*. Co do 1wzego, czworogran ściany  
dwukrotney składa się *naprzód*: z czworogra-  
nu 1wzego terminu ściany swoiéy, *ponióre*:  
z dwóyki, *duplo*, tegoż 1wzego terminu roz-  
mnożonéy przez termin 2gi, *potrzebie*: z czwo-  
rogranu 2giego terminu teyże ściany. Co  
tak krótko okazauię: każda ściana dwukrotna  
może się wyrazić przez  $a \times b$ , albo przez  $a - b$ ,  
azatem ściany te wyniółszy do 2giego stopnia  
czyli porobiwszy z nich czworograny przez  
§ III, każdy czworogran ściany dwukrotney  
wyrazić się może przez  $a^2 \times zab \times b^2$ , albo przez  
 $a - zab \times b^2$ , które czworograny służyć mo-  
gą za formuły czyli wzory wszelkich innych.  
A że oczywiła: iż obydwa te czworograny co  
do znaków tylko różne składają się *naprzód*: z  
czworogranu 1wzego terminu ściany swoiéy to  
jest:



jest :  $z a^2$  , powtóre : z dwójki tegoż terminu i wższego rozmnożony przez  $2g$  to jest :  $z +$  albo  $-$   $zab$  , nakoniec : z czworogranu terminu  $2g$ iego to jest  $z +$   $b^2$  ; więc wżelki czworgran ściany dwukrotny ten a nie inny skład w sobie zawiera. Co się tycze ściany czworogrannę trzykrotnę , czterokrotnę *i t. d.* , z tych każda uważać się może iako dwukrotna , biorąc po kilka ię terminów za ieden , azatem każdego czworogranu mającego ścianę wielokrotną części wyrazić się mogą i wższą lub  $2g$ ą przerzeczoną formułą , które mając przed oczyma w ciągnieniu ściany zapytaney , następujących trzymać się potrzeba przepisów.

*Przepis 1.* Litery wyrażające czworogran , z którego się ściana czworogranna wyciąga , układać tym porządkiem : żeby na i wższym miejscu była ta litera , która największego ma wykładnika , na drugiem zaś ta , która ma mnieyszego jednością , na trzeciem , która ma ieszcze mnieyszego albo żadnego nie ma , toż cały ten czworogran określić temi znakami  $| : : |$  albo też temi  $( : : )$  Dopiero mając w pamięci , że czworogran ściany dwukrotnę składa się z czworogranu i wższego terminu ściany *i t. d.* czyli mając przed oczyma formułę :  $a^2 \mp zab \mp b^2$  , działać podług dalszych przepisów.

*Przepis 2.* Ponieważ w i wższym terminie danego i porządkie ułożonego czworogranu zawiera się czworogran i wższego terminu ściany  
wy-

wyrażony w formule przez  $a^2$ ; więc wyciągnąć z niego ścianę czworograną sposobem w § V. opisanym, i położyć ją za 1wszy termin ścienny po prawy stronie. Potem czworogran jego odciągnąć od danego stopnia, a resztę terminów zachować do dalszego działania.

*Przepis 3.* W tę reść zawiera się jeszcze dwójka 1wszego terminu ściennego przez 2gi rozmnożona wyrażona przez  $2ab$ , i czworogran terminu 2go wyrażony przez  $b^2$ , więc przez dwójkę rzeczoną podzielić termin 1wszy pozostały reszty, a wieloraz napisać za 2gi termin ścienny, toż rozmnożyć go tak przez niego samego, iako przez dwójkę rzeczoną, a produkt odciągnąć od wzmiankowanej reszty; jeśli po tém odciągnięciu nie zostanie, znak będzie: że dany stopień doskonałym był czworogranem ściany dwukrotny, która już wyciągnięta. Jest np: czworogran dany  $(n^2 + 4n + 4)$  którego terminy przez *Przepis 1.* tak są ułożone: że ten na 1wszém jest miejscu, który najwyższego ma wykładnika to jest  $n^2$ ; przez *Przepis 2.* z 1wszego terminu danego czworogranu  $n^2$  wyciągnięta ściana  $n$  jest 1wszym terminem ściany dwukrotny, a tego czworogran odciągnięty od  $n^2$  zostawia resztę:  $4n + 4$ ; przez *Przepis 3.* tę resztę termin 1wszy  $4n$  podzieliwszy przez dwójkę terminu ściennego znalezione  $n$  to jest przez  $2n$ , wieloraz  $+ 2$  wypadnie za 2gi termin ściany czworogrannę, który rozmno-

mnożywszy tak przez niego samego, iako przez dwóykę 1wżego terminu ściany, to iest przez 2n, da produkt:  $\ast 4n \ast n$ , a ten odciągnąwszy od reszty danego czworogranu, nic zostanie, co znakiem będzie: że dany stopień iest doskonałym czworogranem ściany dwukrotnéy  $n \ast 2$ . Wszakże gdybym wyniół tę ścianę do 2go stopnia, wrocilby się nieochylnie dany czworogran.

*Przepis 4.* Gdyby zaś po wyciągnięciu 2go terminu ściany pozostała ieszcze iaka reszta z danego stopnia; dowodembyto było: iż ściana, która się wyciąga, ma się ieszcze składać z 3go terminu, trzeba go więc wyciągać następującym sposobem: dwa 1wższe terminy ściennie już znalezione wziąwszy za ieden, niewiadomy zaś, którego szukam, za 2gi, tak postąpię; iakobym dotąd czworogran tylko terminu 1wższego od danego stopnia odciągnął, azatém iakoby w rescie tegoż stopnia zawierała się ieszcze dwóyka 1wższego terminu ściennego rozmnożona przez 2gi, (biorąc za 1wższy termin sumę dwóch znalezionych, a za 2gi biorąc 3ci ieszcze niewiadomy) i czworogran terminu 2go. Przeto znowu podług *Przep:* 3go działam, to iest: przez dwóykę terminu 1wższego już znalezionego dzielę jeden który z terminów w rescie pozostałych, a wieloraz piszę za nowy termin ścienny, potem wieloraz ten mnożę tak przez niego samego iako i przez dwóykę terminu



minu 1wszego ściennego, a produkt odciąg-  
gam od rzeczonyej reszty. Niech będzie np:

*Stopień dany:                      Ściana Czworogr:*

$$(a^2 - 2a + 4ab + 4b^2 - b + 1) a - 1 + 2b.$$

Przez *Przepis* 1. terminy porządkie ułoży-  
wszy; przez 2. wyciągam ścianę a z 1wsze-  
go terminu  $a^2$  i piszę ją za pierwszy termin  
ściany czworogrannéy, a czworogran jego  $a^2$   
odciągam od danego stopnia to jest od  $a^2$ , zo-  
stała reszta  $= -2a + 4ab + 4b^2 - b + 1$ ; przez  
*Przepis* 3. reszty téy 1wszy termin  $-2a$  dzie-  
lę przez dwójkę 1wszego terminu znalezio-  
nego to jest: przez  $2a$ , wieloraz  $-1$  piszę za  
2gi termin ścienny, a ten rozmnożywszy  
przez niego samego i przez dwójkę 1wsze-  
go terminu to jest przez  $2a$ , produkt  $= 2a + 1$ ,  
odciągam od reszty wyżej pozostałej, po któ-  
rém odciągnięciu została jeszcze reszta  $=$   
 $+4ab + 4b^2 - b$ ; przez *Przepis* 4. dwa termi-  
ny ściany wyciągnionéy  $a - 1$  za ieden wzią-  
wszy i podwoiwszy, przez dwójkę ich to jest  
przez  $2a - 2$  dzielę pozostałą resztę to jest  
uważam: ile razy 1wszy dzielnika termin  $2a$   
mieści się w 1wszym terminie reszty  $+4ab$ ,  
a wieloraz  $+2b$  piszę za nowy termin ścien-  
ny, który przez siebie samego i przez dwóy-  
kę dwóch 1wszych terminów ściennych roz-  
mnożony da produkt  $4ab - 4b + 4b^2$  równy  
reszcie, od której odciągniony, reszty nie zo-  
stawi; zatem dany stopień jest doskonałym

CZWO-

czworogranem, a ściana jego czworograną  
jest a—1\*2b.

*Przepis 5.* Gdyby zaś i po trzeciem ię-  
szcze odciągnięciu miała zostać iaka reszta z  
czworogranu danego, znakiembyto było: iż  
w nim ukryty jest 4ty ięszcze termin ściany  
czworogrannéy, azatém trzy terminy ięy  
brać trzeba za ieden, a 4ty za 2gi i dalej tak  
działać, iak pierwéy, a gdyby i po tém ie-  
szcze działaniu została reszta, 4 terminy brać  
trzeba za ieden i podług Przepisów poprzedza-  
jących działać póty, póki reszt owych stanie.

*Przepis 6.* Gdyby dany czworogran wy-  
rażony był ułomkiem czyli frakcyą; ściana  
jego osobno z licznika, a osobno z miano-  
wnika wyciągać się powinna, zachowując Prze-  
pisy dopiero dane.

*Przeftroga 1.* Niezawodność sposobów do  
wyciągnięcia tey ściany użytych z łanego we-  
wnętrznego składu czworogranów wypływa,  
iako każdy jasnie to widzieć może, porówny-  
wając rzeczony skład z działaniem poprzedza-  
jącém. Doświadczenie zaś, czy dobrze wy-  
ciągniona ściana czworogranna, niezawodne  
będzie; jeśli ściana ta znowu do 2go stopnia  
wyniesiona zgodzi się we wżyltkiem z czworo-  
granem danym.

*Przeftroga 2.* Jeśli z danego czworogra-  
nu nie można wyciągnąć ściany, niemożność  
ta wyraża się przez znak ścienny  $\nabla$  i przez  
linijkę wyżey tego stopnia ciągnioną tym spo-  
sobem:

sobem:  $\sqrt{a \mp b}$ . Zkąd wziął swój początek Rachunek ścienny, *Calculus radicalis*, długi i nudny, a mało przydatny. Ponieważ bez niego można ciągnąć ścianę z czworogranu niedoskonałego przez przybliżanie sposobem Algebraicznym niżey pod § IX. opisanym, albo obróciwszy litery na liczby sposobem Arytmetycznym, o którym w Rozdziale III. Aleć i o tym rachunku będzie choć krótka nauka w przedostatnim Rozdziale téy części.

§ VII. Rozbiór sześciogranów i ścian z nich wyciąganie.

I. Chcąc iak na dłoni widzieć skład sześciogranów, weźmy przed oczy ścianę  $ap$ :  $a \mp b$ , i wynieśmy ją do 3go stopnia. Wyniesiona przez § III. będzie  $a^3 \mp 3a^2b \mp 3ab^2 \mp b^3$ . Stopień ten czyli sześciogran zrobiony z ściany dwukrotny z czego się składa, widoczna. Składa się *naprzód*: z sześciogranu 1wszego terminu ściany swoiëy to jest z  $a^3$ ; *ponwtore*: z tróyki czworogranu, *triplô quadrati*, terminu 1wszego téżë ściany rozmnożonego przez 2gi to jest z  $\mp 3a^2b$ , *potrzecie*: z tróyki terminu 1wszego rozmnożonego przez czworogran terminu 2go to jest z  $\mp 3ab^2$ , *poczmarcie*: z sześciogranu terminu 2go to jest: z  $\mp b^3$ . To mając przed oczyma, a do wyciągania ściany sześciogranney przystępując, uważać i zachować potrzeba następujące Przepisy.

Prze-



*Przepis 1.* Tenże sam i tu służy, który dany jest w § VI. o porządném ilkości ułożeniu, które na tém zależy: żeby ilkość z największym wykładnikiem na 1wszém miejscu po lewicy stronie była, z mnieyszym na 2giém i t. d.

*Przepis 2.* Z samego weyrzenia na formułę sześciogranną:  $a + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  poznać można: że danego 3go stopnia termin 1wszy  $a^3$  zawiera w sobie sześciogran 1wszego terminu ściennego, więc ścianę sześciogranną wyciągnąć z niego. potrzeba przez § V. ta będzie 1wszym ścianą sześciogrannę terminem  $=a$ , toż sześciogran jego odciągnąć od danego stopnia, a resztę do dalszego działania zachować.

*Przepis 3.* W téj reszcie zamykać się będzie tróyka czworogranu terminu 1wszego dopiero znalezionego rozmnożona przez termin 2gi ścienny wyrażona w formule przez  $3a^2b$ , zaczęm zrobiwszy z terminu 1wszego znalezionego czworogran i potroiwszy go, czyli przez 3 rozmnożywszy; a przez produkt podzieliwszy 1wszy termin reszty, wieloraz <sup>3aab</sup> będzie 2gim terminem  $=b$ . Ten mając, trzeba *naprzód*: rozmnożyć przez niego troisty czworogran terminu 1wszego wyrażony przez  $3a^2$ , będzie  $+ 3a^2b$ ; *potwórcie*: trójkę terminu 1wszego wyrażoną przez  $3a$  rozmnożyć przez czworogran 2go wyrażony przez  $b^2$ , będzie  $+ 3ab^2$ ; *potrzecie*: wynieść tenże 2gi termin  $b$  do 3go stopnia, będzie  $+ b^3$ , a te 3 produ-

produkta odciągnąć od reszty z danego stopnia po 1wśm odciągnięciu pozostały (podług nauki *na kar*: 21, *Części I.*) tak dopiero cały sześciogran ściany dwukrotny dotąd szukany odciągnięty będzie od danego stopnia. Przeto jeżeli z niego po tём odciągnięciu nie zostanie, znak będzie: że stopień ten jest doskonałym sześciogranem ściany dwukrotny. Obaczmy to działanie w przykładzie. Niech będzie *np*:

*Stopień dany.*      *Ściana.*

$$\begin{array}{r}
 | 8x^6 - 12x^4n + 6x^2n^2 - n^3 | \quad 2x^2 - n \\
 - 8x^6 + 12x^4n - 6x^2n^2 + n^3 \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

Podług *Przep*: 1. terminy są ułożone, podług *Przep*: 2. z 1wszego terminu danego stopnia  $8x^6$  wyciągnąwszy ścianę sześciograną, znalazł się termin 1wszy ścienny  $= 2x^2$ , którego sześciogran  $8x^6$  odciągnięty od danego stopnia zostawił resztę:  $- 12x^4n + 6x^2n^2 - n^3$ , podług *Przep*: 3. reszty téy termin 1wszy  $- 12x^4n$  podzielony przez troisty czworogran 1wszego terminu ściennego to jest: przez  $12x^4$ , dał 2gi termin ścienny  $- n$ , który rozmnożywszy przez tenże czworogran, żeby było  $- 12x^4n$ , potem troisty czworogran terminu 2go to jest  $3n^2$ , rozmnożywszy przez termin 1wszy  $2x^2$ , żeby było  $+ 6x^2n^2$ , nareście termin 2gi to jest  $- n$  wyniósłszy do 3iego stopnia, żeby było  $- n^3$ , a to wszystko odcią-

gną-

gnawszy od reszty danego stopnia, podług reguły subtrakcyi, nic nie zostało, azatém stopień dany musi być doskonałym sześciogranem ściany dwukrotnéy  $2x^2 - n$ .

*Przep: 4.* Gdyby zaś po tém drugiem odciągnięciu jeszcze iaka reszta zbywała, znakbyto był: że ściana tego stopnia składa się ze trzech terminów. Więc dwa 1wsze znalezione za ieden wzięwszy, ten zaś, który jeszcze nie jest odkryty, za 2gi; tak postąpić, iakoby w ciągnięciu ściany dotąd nic się więcej nie uczyniło, tylko sześciogran 1wszego terminu ściennego odciągnął od danego stopnia, w którego reszcie zawierać się ma nadto troisty czworogran terminu 1wszego (biorąc dwa wynalezione za ieden, a za drugi ten, który jeszcze niewiadomy) rozmnożony przez 2gi, potém troisty czworogran terminu 2giego jeszcze nieodkrytego rozmnożony przez termin 1wszy podwójny, nareście sześciogran 2go terminu. Dlatego przez 3. *Przepis* trzeba z terminu 1wszego to jest z summy dwóch znalezionych zrobić czworogran, a przez ten trzykroć wzięty podzielić następujący termin pozostałej reszty, wieloraz pisząc za nowy termin ścienny. To skończywszy trzeba znowu troisty czworogran terminu 1wszego ściennego podwójnego rozmnożyć przez termin 2gi dopióro znaleziony, i przeciwnie troisty czworogran terminu 2giego rozmnożyć przez termin 1wszy, nakoniec tenże termin 2gi wynieść



nieść do 3go stopnia, a to wszystko od reszty po 2gim odciagnieniu pozostałév odciągnąć, nie zostawiając reszta, ściana będzie zupełnie wyciągniona.

*Przepis 5.* Jeżeli zaś i po tém jeszcze odciagnieniu zostanie jaka reszta z danego stopnia, znak będzie: iż 4ty termin ścienny w nim się zamyka, przeto ściana z czterech terminów składać się mająca powinna być obrócona do 2 terminów tak, żeby za 1wszy wzięte były trzy znalezione, a 4ty za 2gi, i działanie wyżej przepisany sposóbem było kończone *i t. d.*

*Przepis 6.* Jeżeli nakoniec dany stopień będzie łamaną liczbą wyrażony, podług tych samych Przepisów wyciągać się ma ściana sześciogranna tak z licznika, iako z mianownika.

II. Następujący sposób wyciągania ścian sześciogrannych krótszy jest poniekąd od 1wszego, ale na Przepisach jego załadowany, i bez zrozumienia tamtych ledwie zrozumiały, który da się widzieć w następujących przykładach.

C.	A.	B.
$3a^2. \quad   a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.   \quad a - b.$ $\quad \quad \quad - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^2.$ <hr style="width: 50%; margin: 5px auto;"/> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 50%; margin: 5px auto;"> <span>o</span> <span>o</span> <span>o</span> <span>o</span> </div>		

Dany jest sześciogran A, z którego wyciągnąć potrzeba ścianę sześciograną B, 1wszym iey terminem wyciągnionym z  $a^3$  jest a położone

żone pod B, troisty jego czworogran  $3a^2$  po-  
łożony po 1 C jest dzielnikiem 2go terminu  
pod A położonego to jest —  $3a^2b$ . Ztąd wielo-  
raz wypadły — b jest 2gim terminem ściany  
położony pod B. Sześciogran z tych dwóch  
terminów a — b zrobiony i od całego stopnia  
pod A położonego odciągniony kończy dzia-  
łanie. Sciana więc  $= a - b$ .

H.	F.	G.
$12a^2 \mid 8a^3 - 36a^2 + 54a - 27$		$2a - 3$
$- 8a^3 + 36a^2 - 54a + 27.$		

Z danego sześciogranu F wyciągając ścia-  
nę G, naprzód wyciąga się ściana sześciogranna  
z  $8a^3$ , która jest  $= 2a$  położona pod G,  
przez której troisty czworogran połączony pod  
H, to jest przez  $12a^2$  dzieli się 2gi termin da-  
nego stopnia F, to jest —  $36a^2$ , a wieloraz  
— 3 wypada za 2gi termin ściany G, toż z  
obydwoch tych ściennych terminów zrobiony  
sześciogran odciąga się od terminów stopnia F,  
po którym odciągnięciu gdy nic nie zostało,  
znać: że ściana sześciogranna danego stopnia  
jest  $= 2a - 3$ .

*Przeſtoga.* Spōsoby te wyciągania ścian  
sześciogrannych z wewnętrznego, iako każdy wi-  
dzi, sześciogranów składu wypływają, azatém  
niezawodne być muszą. Jeżeli iednak chce kto  
doświadczyć: czy dobrze wyciągnął ścianę,  
niech zrobi z niej sześciogran, a ten, będzieli

C

dane-

danemu równy, upewni o rzetelności ściany wyciągnioney. Jeżeli zaś z danego stopnia ściana sześciogranna nie może się wyciągnąć, tedy przez znak ścienny i liniykę wierzchem ciągnioną wyraża się tak:  $\sqrt[3]{a-b}$ , albo tak:  $\frac{a-b}{3}$ .

§ VIII. *Ogólne prawidło służące do wyciągania ścian z danych jakichkolwiek stopniów.*

To samo prawidło, które w § IV. opisane jest, może być i tu wygodnie użyte z temi jednak warunkami, *naprzód*: żeby ilkość, z której ma się wyciągać ściana, uważać niby daną do wyniesienia na ten stopień, którego się ściana szuka. *Powtórę*: żeby brać na ścianę czworogranną wykładnika łamanego, czyli wykładnika niedoskonałego czworogranu  $\frac{1}{2}$ , na sześciogranną  $\frac{1}{3}$ , na ścianę czwartostopniową  $\frac{1}{4}$  i t. d. przez Wykład III. § 1wśzy; dopiero przystąpić do ciągnięcia ściany za pomocą prawidła sposobem, który okażą następujące przykłady:

I. Niech będzie dany stopień:  $a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2$ , z którego wyciągnąć potrzeba ścianę czworogranną. Z ogólnego prawidła:  $p^m + mp^m - 1q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2$  i t. d. dosyć będzie wziąć trzy 1wśze terminy (inne bowiem nie są zdatne, gdyż ściany z nich wyciągnięte byłyby niedoskonałe)

Je) i założyć p za  $a^2$ , q za  $2ab - 2ac$ ; a że tu idzie o ścianę czworokrotną, więc wykładnikiem iey będzie  $\frac{1}{2} = m$ . Obracając iuż terminy prawidła na litery za nie dopiéro założone, będzie i wſzy ściany termin:  $1^m = a^2 \times \frac{1}{2} = a$ , 2gi termin:  $m p^{m-1} q = \frac{1}{2} a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} a^2$ , czyli odciągnąwszy  $1$  albo  $\frac{2}{2}$  od  $\frac{1}{2}$ , będzie:  $\frac{1}{2} a^2 \times -\frac{1}{2}$ , czyli  $\frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} q$ , to ieſt:  $\frac{1}{2} a^{-1} \times$

$2ab - 2ac$ , to ieſt: biorąc i wſzy termin  $2ab$  poſłożony pod liniyką, i mnożąc współczynnik  $\frac{1}{2}$  przez współczynnika 2 ilkoſci  $2ab$ , będzie  $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ , które ſię opuſzcza; toż wykładnika ilkoſci  $a^{-1}$  wyraźnego, ilkoſci zaś  $2ab$  domniemanego dodając, podług przepisów na wykładniki w mnożeniu, będzie:  $a^{-1+1} = a^0 b = 1b$ , (gdyż  $a^0 = 1$  przez Wykład V.)  $= b$ . Biorąc zaś i 2gi termin pod tąſ liniyką poſłożony  $- 2ac$ , będzie iak piérwéy:  $\frac{1}{2} a^{-1} \times - 2ac = - a^{-1+1} c = - 1c = - c$ ; więc ſcianą ſzukaną będzie  $a + b - c$ . Póty bowiem tylko ſię idzie, póki ſię nie ſtanie na  $m = 0$ , co gdy ſię trafiło w  $a^0 b$  i w  $- a^0 c$ , już tém ſamém wynalezione ſą wſzyſtkie terminy ſciany ſzukanéy.

II. Niech będzie do wyciągnięcia dana ſciana ſzeſciokrotna z ſtopnia:  $a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$ ; będzie  $a^3 = p$ ,  $- 3a^2b - 3ab^2 = q$ , a że tu idzie o ſcianę ſzeſciokrotną, będzie  $\frac{1}{6} = m$ ; kładąc iuż za p, q, m, ich ceny we dwóch prawidła ogólnego terminach, będzie:  $1^m =$



$a^3 \times \frac{1}{7} = a$  pierwszy termin ścienny. Potem  
 $m^m - 1 q = \frac{1}{7} a^3 \times \frac{1}{7} - 1 q$ , czyli odciągając — 1  
 od  $\frac{1}{7}$ , będzie  $\frac{1}{7} a^3 \times \frac{1}{7} - 2 q$ , mnożąc zaś , będzie :  
 $\frac{1}{7} a^3 - 6 q$ , to jest:  $\frac{1}{7} a^3 - 2 q$ , albo kładąc za  $q$  cenę ie-  
 go:  $\frac{1}{7} a^3 - 2 \times \frac{1}{7} a^2 b = \frac{1}{7} a^3 - 2 a^2 b = \frac{1}{7} a^3 - 2 a^2 b =$   
 $a^3 b = 1 b = b$ . I na tém trzeba prze-  
 stać, iako się wyżej namieniło. Sciana więc  
 sześciogranna danego stopnia będzie:  $a - b$  i t.d.

*Przeestroga.* Kiedy cena litery  $m$  za wy-  
 kładnika w prawidło położony nigdzie nie  
 trafia się  $= 0$ , natenczas sciana danego sto-  
 pnia będzie niedoskonała, czyli, iaką Alge-  
 bryści nazywają, nieracyonalna, *Radix irratio-*  
*nalis*, która mniéj, niż jednością chybia od  
 doskonałej, ani żadną tak liczbą, iak literą  
 wyrazić się nie może, a zatem wyciąganie onéj  
 może się pociągnąć nieskończenie czyli przez  
 terminy nieskończone, co się w Algebrze i  
 Arytmetyce nazywa przybliżaniem ścian,  
*approximatio radicum*, o którym następujący §.

§ IX. Wyciąganie ścian z stopniów niedo-  
 skonanych przez przybliżanie czyli przez  
 terminy nieskończone.

I. Wyciąganie takie żadný nowéj nie u-  
 czyni trudności trzymającemu się wyżej opi-  
 sanego, a dopiero użytego prawidła. Wzią-  
 wszy bowiem z tego prawidła tyle początko-  
 wych terminów, przez ile się podoba mieć  
 ścianę ciągnioną np: 4, albo 5; to jest:  $p^m$

$m^m$

Dajmy np: drugi stopień czyli czworogrą-  
 niedoskonały  $a^2 - b^2$ ; z którego ściana czwo-  
 rogranna ma się wyciągać przez terminy nie-  
 skończone A. B. C; będzie:  $p = a^2$ ,  $q = -$   
 $b^2$ , m zaś, dla ściany czworogrannéy  $= \frac{1}{2}$  przez  
 Wykład III, zatem będzie:

B. (m<sup>m-1</sup>q =  $\frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{2}-1} q$ , to jest: odciągnąwszy — 1, czyli —  $\frac{1}{2}$  od  $\frac{1}{2}$ , a resztę —  $\frac{1}{2}$  rozmnożywszy przez wykładnika ilkości  $\frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ , będzie:  $\frac{1}{2} 2^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} 2^{\frac{1}{2}-2} = \frac{1}{2} 2^{\frac{1}{2}-1} q$ , czyli za q założywszy jego cenę — b<sup>2</sup>, będzie:  $\frac{1}{2} a^{-1} \times b^2$ , czyli *naprzód*  $\frac{1}{2} a^{-1}$ , (gdyż a<sup>-1</sup> =  $\frac{1}{a}$  przez Wykład IV.) =  $\frac{1}{2a}$ , *ponowrę*:  $\frac{1}{2a} \times b^2 = \frac{bb}{2a}$  ) =  $\frac{bb}{2a}$ .

C.  $(m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}-1) : 2,$   
 to jest : od  $\frac{1}{2}$  odciągając — 1, a resztę  
 —  $\frac{1}{2}$  dzieląc przez 2, będzie wieloraz —  $\frac{1}{4}$ , a  
 ten mnożąc przez  $\frac{1}{2}$ , będzie: —  $\frac{1}{8} a^2$ ; toż samo  
 znowu —  $\frac{1}{8} a^2 \times \frac{1}{2}^{-2}$ , odciągając — 2 od  $\frac{1}{2}$ ,  
 a resztę —  $\frac{3}{2}$  przez wykładnika ilkości  $a^2$   
 mnożąc, będzie —  $\frac{1}{8} a^{-3} q^2$ , czyli przez IV.  
 Wykład : —  $\frac{1}{8} a^{-3} q^2$ ; nareście za  $q^2$  zakła-  
 dając —  $b^2$  wyniesione do 2go stopnia to jest  
 —  $b^4$ , przeto : że  $q^2$  jest czworogranne, bę-  
 dzie

dzie przez tenże Wykład : —  $\frac{1b^4}{8a^3} - \frac{b^4}{8a^3}$  *i t. d.*

Będzie więc ściana przez przybliżanie wyciągniona  $A + B + C = a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} \dots$

II. Spółób ten ciągnienia ściany przez przybliżanie zda się być niewdrożonym w takie rachuby przytłudnym i długim, lecz skoro się wdzożą, uśnadnić go sobie i skrócić potrafią. Jeżeli atoli samo wdrażanie się zatrudnia, mogą innego prawidła od Newtona ułożonego użyć, które przeto jest wygodniejszy, że uymuje mozołu, który frakcye zadają, jako każdy w używaniu samém doświadczy. Jest zaś takie:  $P \frac{m}{n} + \frac{m}{n} A Q \frac{m-n}{2n}$

$B Q \frac{m-2n}{3n} C Q \frac{m-3n}{4n} D Q \dots$  *i t. d.*

Gdzie P wyraża 1wszy termin téy ilkości, którey się ściana ma wyciągać, Q znaczy resztę terminów téyże ilkości podzielonych przez P czyli przez termin 1wszy,  $\frac{m}{n}$  wyraża wykładnika czyli stopień ściany, litery zaś A, B, C, D znaczą terminy już wyciągnięte to jest: A wyraża 1wszy termin ścienny wyciągnięty  $= P \frac{m}{n}$ ; B 2gi termin  $= \frac{m}{n} A Q$ , C 3ci  $= \frac{m-n}{2n} B Q$  *i t. d.* Przykłady używanie tego prawidła pokażą.

I. Niech będzie dana do wyciągnięcia  
 ściana czworogranna z ilości  $\sqrt{c^2 + x^2}$ , bę-  
 dzie  $P = c^2$ ,  $Q = \frac{x^2}{c^2}$ , gdyż  $Q$  wyraża re-  
 szkę tetminów daney ilości podzieloną przez  
 iwlży,  $m = 1$ ,  $n = 2$  azatém wykładnik  
 2giego stopnia  $\frac{1}{2} = \frac{m}{n}$ . Będzie więc :

$$A \left( P \frac{m}{n} = c^2 \times \frac{1}{2} \right) = c^1 = c.$$

$$B \left( \frac{m}{n} A Q = \frac{1}{2} c \times \frac{x^2}{c^2} \text{ to jest : } \frac{c}{2} \times \frac{x^2}{c^2} = \frac{cx^2}{2c^2} \right) = \frac{x^2}{2c} \text{ i t. d.}$$

II. Niech będzie dana do wyciągnięcia  
 ściana sześciogranna z ilości  $\sqrt{a^3 - b^3}$ ,  
 będzie  $P = a^3$ ,  $Q = \frac{b^3}{a^3}$ ,  $m = 1$ ,  $n = 3$ ,  
 azatém będzie.

$$A \left( P \frac{m}{n} = a^3 \times \frac{1}{3} \right) = a^1 = a.$$

$$B \left( \frac{m}{n} A Q = \frac{1}{3} a \times \frac{b^3}{a^3} \right) = \frac{b^3}{3a^2}.$$

Prze-



*Przeestroga 1.* Sposoby te wyciągania ścian przez terminy nieskończone, któreby się zbliżały do doskonałej ściany, służą do wynalezienia płaszczyzn ziemiomiernych, długości linii krzywych, wymiaru wierzchołków brył, i innych wielkiej wagi Mechanicznych robót, przeto obszerniej tu nieco są wyłożone.

*Przeestroga 2.* W stopniach niedoskonałych można częstokroć prześtać na wyciągnięty ścianie w terminach całkowitych, kiedy nie wiele zależy na tęg reście, która po wyciągnięciu terminu ostatniego zostaje, kiedy zaś z opuszczenia tęg reszty znaczny jaki brak mogłoby wynikać, trzeba koniecznie albo danych Algebraicznych sposobów na wyciąganie ściany przez przybliżanie użyć, albo obróciwszy litery cały niedoskonały stopień wyrażające na liczby, za które też litery założone były na początku działania, Arytmetycznym sposobem rzeczony ściany wyciągać, o którym w następującym Rozdziale.

### R O Z D Z I A Ł. III.

*O Wyciąganiu ścian z liczb pospolitych.*

**Z**E przy wyciąganiu ścian z ilości Algebraicznych wyżłostopniowych nieuchronna zdarza się potrzeba wyciągania tychże ścian z liczb pospolitych dlatego: iż w rozwiązowaniu Problematów składanych Ekwacye  
nie

nie samemi literami wyrażone bywają, lecz miéwają częstokroć i liczby przyłączone, a choćby i samemi się tylko literami wyrażały, te jednak obracają się na liczby przy końcu działania, a ztąd nieuchronna wynika potrzeba wyciągania z nich ścian Arytmetycznym sposobem, a że dostatecznéj nauki o wyciąganiu ścian z liczb wyżłostopniowych w Arytmetykach Oczyszczym językiem dotąd wydanych nie mamy, przeto: że téj nauki dać bez poprzedzającéj Algebry trudno było; dlatego za rzecz użyteczną sądzę, zbiór onéj iak naydokładniejszy do téj części Algebry przyłączyć.

§ X. O Składzie i rozbiórce Czworogrónów liczbowych.

Lubo Formuła ogólna wyżéj opisana  $a^2 + 2ab + b^2$ , albo  $a^2 - 2ab + b^2$  doskonale okazuje cały skład i każdą z osobna część czworogranu nie mniéj w liczbach, iako w ilkościach Algebraicznych do 2giego stopnia wyniesionych, wyrażając *naprzód*: czworogran 1go terminu ściany przez  $a^2$ ; *ponióre*: dwójkę 1wszego terminu rozmnożoną przez termin 2gi wyrażając przez  $+$  albo  $- 2ab$ ; *potrzebie*: czworogran 2go terminu przez  $b^2$ ; że iednak w liczbie czworogrannéj części te nie tak są widoczne, iak w czworogranie Algebraiczn: gdyż w liczbach przerzeczone części iedne z drugimi się zmieszane, przeto nie dosyć

dosyć jest na tém, co się w Rozd: II. powiedziało o czworogranach, trzeba nadto następujących wiadomości.

1. Jeżeli dana liczba czworogranna iedną lub dwiema figurami jest wyrażona, ścianą iey czworogranna iedną tylko wyraża się figurą, a ta łatwo się znajdzie w Głowie każdego w używaniu Rachmistrzowską sztukę mającego, albo w Tabliczce niżej położoney zawierający w sobie różne stopnie i ich ściany.

Ściany	Czworo- grany.	Sześcio- grany.	4te Sto- pnie.	5te Sto- pnie.
1	1	1	1	1.
2	4	8	16	32.
3	9	27	81	243.
4	16	64	256	1024.
5	25	125	625	3125.
6	36	216	1296	7776.
7	49	343	2401	16807.
8	64	512	4096	32768.
9	81	729	6561	59049.

Gdzie widoczna : że każda z liczb czworogrannych w 2gię kolumnie umieszczonych ścianę ma wyrażoną jedną tylko figurą ; tak np: 49 ma 7, 64 ma 8 i t. d. Przyczyna tego jest : iż najmniejsza ściana czworogranna składająca się ze dwóch figur jest liczba 10 , a ię czworogran 100 jest ze trzech już figur złożony ; toć czworogran z iednéy lub dwóch figur złożony ściany nie może mieć tylko jedną figurą wyrażoną. Jeżeli zaś liczba iaka czworogranna 3 albo 4 figury w sobie zawiera , ściana ję ze 2 tylko figur składać się powinna , gdyż największa ściana czworogranna ze 2 figur złożona jest 99 , a przecię czworogran ię 9801 nie składa się tylko ze 4 figur. Najmniejsza zaś ściana ze 3 figur składająca się jest 100 , którey czworogran 10,000 zawiera figur 5. Jeżeli znówu dany czworogran złożony jest z 5 lub 6 figur , ściana iego 3 tylko figury mieć w sobie powinna ; ponieważ największa o 3 figurach ściana jest 999 , którey czworogran 998,001 nie ma w sobie tylko 6 figur , a najmniejsza ściana o 4 figurach jest 1000 , którey czworogran 1,000,000 zamyka w sobie 7 figur i t. d.

Zkąd się wnosi : że liczbę czworogranną króskami tak przedzieliwszy , zaczynając od ręki prawéy ; żeby w każdéy przedziałce po dwie figur było prócz ostatniéy , gdzie iedna tylko czasem bywa , łatwo dowiedzieć się można :



zna: z wielu figur ściana tegoż czworogranu na się składać. Jle bowiem w czworogranie zrobionych przedziałek, tyle będzie figur pomienion. ścianę składających; tak np: że w czworogranie:  $3 \mid 74 \mid 34$ , trzy są przedziałki, toć w ścianie jego trzy muszą być figury i t. d.

II. Zeby już poznać jak naydoskonalej cały skład liczby czworogrannéy, i dóysć każdej części do składu iéy należnéy, weźmy przed oczy czworogran np: 529 zrobiony z ściany czworogrannéy 23. Wszakże, *naprzód*, iako ściana przerzeczona ze dwóch tylko figur jest złożona, tak czworogran 529 dwie tylko może mieć w sobie przedziałki to jest:  $5 \mid 29$ ; *powtóre*: 1wsza po lewéy stronie figura 2 ściany 23 jest na miejscu dziesiątków, więc w rzeczy samej jest  $=20$ , azatém czworogran iéy będzie  $20 \times 20 = 400$ . Lecz ten czworogran jest 1wszą częścią w składzie liczby:  $5 \mid 29$  przez § VI, więc zawierać się powinien w 1wszój przedziałce jéy po lewéy stronie to jest: w liczbie 5, *potrzecie*: 2ga figura téżże ściany 23 czyli 3 jest pojedyncza, bo jest na miejscu jedności, więc mnożąc przez nią dwójkę 1wszego terminu 2 zostającego na miejscu dziesiątków  $=40$ , będzie  $40 \times 3$  produkt  $=120$ . Aże dwójka 1wszego terminu ściennego rozmnożona przez 2gi jest drugą częścią liczby czworogrannéy przez wzmiankowany § VI; więc 120 zamykać się musi

musi w reście 1wszý przedziałki danego czworogranu 5 | 29, która tu jest  $\equiv 1$  i w 1wszý figurze przedziałki 2giý to jest: w liczbie 2; *naostatek*: termin 2gi ścienny 3 wyniółszy do 2go stopnia, będzie czworogran  $\equiv 9$ . Aże czworogran tego terminu jest 3cią częścią składającą czworogran dany przez tenże § VI; więc mieścić się będzie w reście 2giý jego przedziałki, to jest w liczbie 9. Cały tedy skład danego czworogranu mającego ścianę ze dwóch terminów złożoną ledwie nie tak oczywiście daje się widzieć w liczbach, iako w czworogranie Algebraicznym:  $a^2 + 2ab + b^2$ .

*Wzór tego składu. Czworogran. Sciana.*

I. Czworog: 1go term: 5 | 29. 23.  
ścien: to jest licz:  $2 \times 2 \equiv 4$  0 0.

II. Dwóyka tegoż terminu  
rozmnożona przez 2gi,  
to jest:  $4 \times 3 \equiv 12$  0.

III. Czworogran terminu  
2giego, czyli  $3 \times 3 \equiv 9$ .

Części te w iednę sumę — —  
zebrane  $\equiv 529$ .

Skąd się ogólnie wnosi: że, kiedy dany czworogran dwie ma w sobie przedziałki, a za-  
tém i w ścianie swoiý dwa terminy, wten  
czas *naprzód*: czworogran 1wszego terminu  
ściennego zamyka się w 1wszý przedziałce  
danego

danego czworogranu ; *powtórę* : dwójka tegoż terminu rozmnożona przez termin 2gi mieści się w reszcie 1wszemy przedziałki, jeżeli iaka jest, i w 1wszemy figurze przedziałki 2gię ; *potrzebie* : czworogran 2go terminu zawiera się w reszcie téż przedziałki 2gię.

III. Chcąc zaś poznać skład czworogranu mającego ścianę ze 3 terminów złożoną, weźmy *np*: czworogran  $5 \mid 47 \mid 56$  zrobiony z ściany 234. Wszakże *naprzód* : iako ściana ta nie ma w sobie tylko 3 figury, tak i czworogran tylko 3 przedziałki ; *powtórę* : 1wszy z lewéj strony termin ścienny 2 jest na miejscu set, więc  $\equiv 200$ , azatém czworogran jego  $200 \times 200 \equiv 40,000$  zawierać się musi w 1wszemy z lewéj ręki przedziałce danego czworogranu to jest : w liczbie 5 ; *potrzebie* : 2gi termin ścienny 3 jest na miejscu dziesiątków, więc  $\equiv 30$ , więc dwójka terminu 1wszego  $\equiv 4$  rozmnożona przez 2gi  $\equiv 3$  uczyni w rzeczy samej  $400 \times 30 \equiv 12,000$ , a zatém mieścić się będzie w reszcie 1wszemy przedziałki, która jest  $\equiv 1$ , i w 1wszemy figurze przedziałki 2gię to jest : w liczbie 4 ; *poczwarte* : ponieważ 2gi ścienny termin  $3 \equiv 30$  (iako się rzekło) toć czworogran jego  $30 \times 30 \equiv 900$  zawierać się musi w reszcie figury 1wszemy czyli w liczbie 2 i w drugiemy figurze téż 2gię przedziałki to jest : w liczbie 7. Ze zaś dany czworogran  $5 \mid 47 \mid 56$  ścianę ma ze trzech figur złożoną dla 3 w nim przedziałek ;  
więc

więc odkrywſzy przerzeczonym ſpoſobem czę-  
ści dwóch 1wſzych terminów ſciennych w ſkład  
czworogranu danego wchodzących , ukazać  
nadto trzeba ukryte w nim te części , które  
z 3go terminu ſciennego tamże weſzły. Po-  
trzeba więc prócz tego , co ſię dotąd robiło ,  
1wſze dwa z lewéy ſtrony terminy to ieſt 23  
brać za ieden termin ſcienny to ieſt : za termin  
1wſzy , 3cią zaś figurę ſcienną to ieſt: 4 za  
termin 2gi tak , iak ſię działało w § VI , odkry-  
wając ſkład czworogranów Algebraicznych.  
Aże 1wſze dwa terminy ſcienne ſą na mieyſcu  
ſet i dziesiątków , będą więc  $23 = 230$ ; bio-  
rąc ie zaś za ieden to ieſt : za 1wſzy , będzie  
dwóyka terminu 1wſzego rozmnożona przez  
2gi , którym tu ieſt 3ci , czyli  $460 \times 4 =$   
 $1840$  , która nie tylko w reſcie 2giéy prze-  
działki ; lecz i w 1wſzéy figurze przedziałki  
3ciéy danego czworogranu mieſci ſię to ieſt  
w liczbach 185 , czworogran zaś 2go ſcien-  
nego terminu (którym tu ieſt 3cia figura 4)  
 $= 16$  zawiera ſię w reſcie téyże 3ciéy prze-  
działki , czyli w liczbie 16. Co wſzyſtko  
pod oko podpada w naſtępującym rozbiórze:

Wzór



## Wzór składu. Czworogran. Ściana.

- I. Czworog: term: 1go 5,4 7,56. 234.  
ścienne go to jest  $2 \times 2 = 4,0000$ .
- II. Dwówka term: 1go  
rozmnoż: przez 2gi,  
czyli  $4 \times 3 = 12000$ .
- III. Czworogran term:  
2go. czyli  $3 \times 3 = 900$ .
- IV. Biorąc z term: 23  
za 1, dwówka ich  
 $46 \times 4 = 1840$ .
- V. Czworogran termin:  
2go czyli 3cięy figu-  
ry  $4 \times 4 = 16$ .

Summa  $= 54756$ .

Przeto jeżeli ściana danéy czworogrannéy liczby z 3. figur składa się, a dwie 1wsze z lewéy strony biorą się za 1wszy termin ścienny, trzecia zaś za 2gi; ogólnie wniesć się może *naprzód*: że dwówka terminu 1wszego tak wziętego rozmnożona przez termin 2gi, czyli figurę 3cią umieszczona będzie w reście drugiey przedziałki danego czworogranu i w 1wszey figurze przedziałki 3cięy; *pontóre*: że czworogran 2go terminu ściennego będzie zamknięty w reście téżé przedziałki 3cięy. Co tak oczywiście daie się widzieć, iako w czworogranie Algebr:  $a^2 + 2ab + 2ac + 2bc + b^2 + c^2$  mającym ścianę trzykrotną:  $a + b + c$ .

Jako

Jako bowiem w tem jest *naprzód*:  $a^2$  czyli czworokąt 1wszego terminu ściennego; jest *powtore*:  $2ab$  czyli dwówka terminu 1wszego a rozmnożona przez termin  $2gi$   $b$ , jest *potrzebie*:  $b^2$  czyli czworokąt terminu  $2go$   $b$ ; jest *poczwarte*:  $2ac + 2bc$ , czyli biorąc dwa 1wsze terminy  $a + b$  za jeden, dwówka z nich  $2a + 2b$  rozmnożona przez  $2gi$  termin to jest przez  $3cią$  figurę  $c$ , jest *popięte*:  $c^2$  czyli czworokąt  $2go$  terminu albo  $3cię$ y figury  $c$  przez § VI; tak w danéy czworogrannéy liczbie 5,47,56 wżyskie te części są widoczne.

IV. Gdyby zaś dany czworokąt miał ścianę ze 4rech terminów złożoną, iaki jest ten: 5,48,02,81 mający ścianę: 2341; wtenczas ukazawszy tak, iak się czyniło dotąd, w rzeczonym czworokącie *naprzód* części dwóch 1wszych terminów ściennych, potem części trzech 1wszych za dwa wziętych, trzeba nadto dla 4tego terminu ścianę składającego brać 1wsze trzy za jeden, a 4ty za  $2gi$ , i znowu tak wziętego 1wszego terminu dwójkę przez termin  $2gi$  (to jest przez figurę  $4tą$ ) rozmnożoną odkrywać, która zapewne będzie się zamykała w reście  $3cię$ y przedziałki danego czworokątu i w 1wszém figurze przedziałki  $4tę$ y, a czworokąt ostatniego terminu znajdzie się w reście ostatniéy przedziałki.

Wzór składu.

Czworogran. Ściana.

5,48,02,81. 2341.

I. Czworogr term: 1go = 4000000

Dwójka term: 1go

przez 2gi rozmnoż:

czyli  $4 \times 3 = 12,00000$ 

Czworogr term: 2go

to jest  $3 \times 3 = 90000$ 

II. Biorąc dwa term: za

jed: dwójka ich  $46 \times 4 = 184000$ 

Czworogran term:

2go  $4 \times 4 = 1600$ 

III. Biorąc trzy termin:

2 3 4 za jeden, dwój-

ka ich  $468 \times 1 = 4680$ 

Czworog: 2go term:

 $1 \times 1 = 1$ 


---

*Summa* = 5480281.

Co równie jaśnie pokazuje się iako i w Algebraicznym czworogranie:  $a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd + b^2 + c^2 + d^2$ , którego ściana czworogranna jest:  $a + b + c + d$ .

V. Gdy nakoniec danego czworogranu ściana jest z 5, 6, lub więcej jeszcze terminów złożona, wtenczas brać trzeba naprzód i wże dwa terminy ściennie pojedynczo, potem dwa i wże za jeden, toż 3 i wże za 1, toż dopiero 4 lub 5 za 1, a ostatni za 2gi, i każdą z osobna tę część odkrywać w przedziałkach

zacz danego czworokranu. Do czego nie za-  
 bierając się robotą długą czworokranów Al-  
 liczych mających ściany wielokrotne,  
 można formuły ogólné :  $a^2 + 2ab + b^2$ ,  
 za pomocą naprzód i wśzch dwóch  
 terminów pojedynczo wziętych pokazać czę-  
 ści  $= a^2 + 2ab + b^2$ , potem  $2ab + b^2$  tychże  
 dwóch terminów za ieden wziętych, toż wziętych  
 za 3 lub 4. i. t. d. Oto tego wizerunek :

Formuła.	Czworokran,	Ściana.
	(5, 48, 26, 22, 25)	23415,
I. $a^2 =$	4 . . . . .	
$+ 2ab =$	12 . . . . .	
$+ b^2 =$	9 . . . . .	
II. $+ 2ab =$	184 . . . . .	
$+ b^2 =$	16 . . . . .	
III. $+ 2ab =$	468 . . . . .	
$+ b^2 =$	1 . . . . .	
IV. $+ 2ab =$	2341 . . . . .	
$+ b^2 =$	25 . . . . .	

*Summa* = 548262225.

§ XI. Jak się wyciąga ściana czworokranna  
 z danéy czworokrannéy liczby?

Przepis 1. Dany czworokran okréśliwszy,  
 dzielę na części tak, żeby w każdéy prze-  
 działce po dwie było figur; będzie niezawo-  
 dnie ściana z tylu figur złożona, ile jest w  
 Dz liczbie



liczbie czworogrannéy przedziałek z przyczyny w § X. obszérnie wyłuszczońey.

2. Jeżeli dany czworogran ma dwie tylko przedziałki, biorę, zaczynając z lewéy strony, i wszą, w któręy zawiera się czworogran i wszego terminu ściennego i szukam tego czworogranu w tabliczce wyżej położonéy, gdzie się albo równy albo mało co mniejszy znajdzie, a ścianę swoię na przeciwko pokazę, którą za i wszy termin ścienny czworogranu danego kładę, czworogran zaś iego odciągam od i wshęy przedziałki, resztę notując.

3. Do téy reszty (ieżeli iaka została) składam zgą przedziałkę, ieżeli zaś żadnéy nie masz reszty, tedy samą zgą przedziałkę złożę wszy, ostatnią ię figurę odcinam, a i wshę z lewéy strony figury dzielę przez dwóykę i wszego terminu ściennego przez *Przep:* 2. znalezione, wieloraz będzie zgim ściennym terminem, który przyłączam do dzielnika to iest do wzmiankowaney dwóyki, i przez niego tak tęż dwóykę, iako i iego samego mnożę, a produkt odciągam od reszty danego czworogranu. Niech będzie np:

*Czworogran. Sciana.*

(5, 2 9) 23.

A. 4.

B. 1 2, 9.

C. 4 3.

D. 1 2 9.

Przy A

Przy A jest czworogran z tabliczki wzięty od 1wszég danego czworogranu części to jest od 5 mało co mnieyszy, którego ściana  $\equiv 2$  jest 1wszym terminem ściennym. Przy B 1wsza figura 1 jest reszta pozostała po odciągnięciu 4 od 5, do której 2ga przedziałka 29 złożona i ostatnia iéy figura 9 jest odcięta.

Przy C 1wsza figura 4 jest dwóyka 1wzéggo terminu ściennego, przez którą dzieli się liczba 12 to jest reszta 1wszég przedziałki i 1wsza figura 2giéy, a wieloraz 3 za 2gi termin ściany ogólnéy jest napisany. Przy témże C do dzielnika 4 przyłącza się wieloraz jego czyli 2gi termin ścienny 3, i staie się 43, co rozmnożywszy przez tenże sam termin czyli przez 3, wypada za produkt liczba niżéy przy D napisana, i liniyką podkreślona, którą odciągnąwszy od liczby B czyli od 129 nic nie zostaje, azatém czworogranu 529 ściana wynaleziona  $\equiv 23$ .

4. Jeżeli dany czworogran więcéy niż dwie ma w sobie przedziałki, ściana tego więcéy także niż dwa terminy zawierać musi, azatém wynalazłszy, przez dane przepisy, dwa 1wsze, brać trzeba za ieden termin ścienny, 3ci zaś ieszcze niewiadomy za 2gi, i tymże samym sposobem, który jest wyżéy przepisany, następujący termin wyciągać, to jest: do reszty, jeżeli iaka po 2giém odciągnięciu została, złożyc trzecią przedziałkę, i tę, odciąwszy ostatnią figurę, dzielić przez dwóykę terminu 1wzéggo

go (biorąc zań, iako się rzekło, dwie figury ścienne) i tak wciąż działać, iak piérwéy. A iéśli po wyciągniéniu trzech terminów ściennych, 4ta iészczé będzie w danym czworogranie przedziałka, tedy 3 terminy wynalezione za 1wśzy wziąwszy a 4ty niewiadomy za 2gi, toż samo czynić, co się dotąd czyniło. Niech będzie np:

Czworogran.      Sciana.  
(1, 7 4, 2 4.)      1 3 2.

A.	1.
B.	7, 4
C.	2 3
D.	6 9
E.	5 2, 4
F.	2 6 2
G.	5 2 4.

Przy A iést czworogran z tabliczki wzięty równy i w iéży liczbé zawartéy w 1wśéy po lewéy stronie przedziałce, którego ściana = 1 kładzie się za 1wśzy termin ścienny, a czworogran iego = 1 odciągniony od przedziałki i w iéży, żadnéy nie ma reszty. Przy B iést 2ga przedziałka 74, w którój ostatnia figura krę-  
ską

figu ską odcięta. Przy C iwsza figura 2 jest dwóy-  
 trwo ka iwszego terminu ściennego, przez którą  
 scie podzieliwszy liczbę 7, wieloraz 3 kładzie się  
 wor za 2gi termin ogólny ściany i przyłącza się  
 yna do liczby 2 przy C, gdzie przez nią i przez  
 my siebie samego mnoży się, a produkt 69 poło-  
 yni żony przy D odciąga się od B, a do reszty 5  
 przy E następująca składa się przedziałka. Przy  
 F jest dwóyka wynalezionych dwóch terminów  
 ściennych  $= 26$ , przez którą liczba przy E  
 przed kręską położona to jest 52 dzieli się, a  
 wieloraz  $= 2$  za nowy termin ścienny kładzie  
 się, i do dzielnika 26 przyłącza się, toż cała  
 liczba przy F przezeń się mnoży, a produkt  
 524 przy G napisany od liczby E odciąga się  
 bez żadnej reszty; cała więc wyciągniona  
 ściana  $= 132$ .

5. Gdyby się zaś zdarzyło, żeby dwóyka  
 terminu 1go była większa nad liczbę podzielną  
 czyli tę, którą dzielić trzeba; natenczas za  
 wieloraz albo za nowy termin ścienny pisze się  
 0, i składa się następująca przedziałka, która,  
 ostatnią odciągwszy figurę, dzieli się przez dwóy-  
 kę wszystkich terminów ściennych już wynal-  
 ezionych, wieloraz stąd wypadły, będzie no-  
 wym terminem ściennym, a dalsze działanie  
 przepisany pójdzie sposobem. Niech bę-  
 dzie np:

Czwo-



Czworogran.

Ściana.

(4, 24, 3 6)

206.

A. 4

B. 2, 4

C. 4

D. 2 4 3, 6

E. 40 6

F. 2 4 3 6

Przy A jest czworogran z tabliczki wzięty. Przy B jest 2ga przedziałka. Przy C jest dwówka 1wszego terminu ściennego, która ponieważ i razu nie mieści się w liczbie 2 przy B położony, przeto za 2gi termin ścienny pisze się 0. Przy D do 2giéw 3cia przedziałka jest przyłączona. Przy E 1wsze dwie liczby 40 tą dwójką dwóch terminów ściennych, przez które liczba 243 przy D dzieli się, a wieloraz 6 za 3ci termin ścienny kładzie, tudzież do liczby 40 przy E przyłącza się, i cała ta liczba przez tenże sam termin mnoży się, a produkt 2436 przy F położony odciąga się od liczby D, po którym odciągnięciu gdy nic nie zostaje, ściana wyciągniona jest = 206.

6. Jeżeli z łomanéy liczby wyciągać przyydzie ścianę czworograną, tę tak z licznika iako z mianownika podług dopiero danych

Przepi-

Przepisów zosobna wyciągać potrzeba np:

$$\sqrt[144]{\frac{1}{2}} = 6, \text{ gdyż iako } \sqrt[144]{12} = 12, \\ \text{tak } \sqrt[4]{2} = 2.$$

### *Okazanie tych Przepisów.*

Jako skład czworogranów w § X. wyszczególniony pokazuje: że czworogran każdy nie innego nie jest tylko produkt ściany przez siebie rozmnożony; tak i Przepisy na wyciąganie ściany czworogrannéj dane dowodzą: że toż wyciąganie nie innego nie jest, tylko dzielenie czworogranu. Co nim się okaże, wprzód części tego dzielenia przełożę. Sam dany czworogran, z którego się ściana wyciąga, jest liczbą podzielną, ściana jego jest wielokrotnie, a części w skład czworogranu wchodzące bywają dzielnikiem coraz innym czyli za wyciągnięciem każdego terminu ściennego nanowo wyszukany, i tém się to jedynie od pospolitego liczb dzielenia ścian wyciąganie różni: że tamto dzielnika na wszystkie liczby podzielne miéwa jednego, to coraz innego, tamtego dzielnik bywa dany, tego w składzie podzielny liczb nanowo wyszukany. Co żeby się jaśniej okazało, a tém samém dowiodło: że przepisy na wyciąganie ścian czworogrannych dane są niezawodne, weźmy na uwagę Czworogran 529 za wzór składu i rozbiór czworogranów w § X, a za wzór wyciągania ścian czworogrannych w § XI położony

żony. Wszakże *naprzód*: tam się pokazało: że czworogranu rzeczonego 1wła po lewéj stronie figura 5 zawiera w sobie czworogran 4 1włego terminu ściennego 2, tu zaś wyciągając z niego ścianę, czyli raczéj z tabliczki wziętą za 1włszy termin ścienny kładąc, nic innego się nie czyni, tylko w rzeczy samej wzmiankowana figura 5. dzieli się przez 2, a wieloraz 2 kładzie się za 1włszy termin ścienny, i dalej, iak w dzieleniu polpolitem, produkt z rozmnożenia wieloraza przez dzielnika wypadły odciąga się od liczby podzielney, tak i tu czworogran 1włego terminu ściennego iako podobny tamtemu produkt odciąga się od 1włzého przedziałki danego czworogranu iako od swojéj liczby podzielney, więc przepisy 1włszy i 2gi są oczywiste. *Ponióre*: pokazało się w tymże przykładzie: iż w ręście przedziałki 1włzého i w 1włzého figurze, 2giéy przedziałki czyli w liczbie 12 zawiera się dwóyka 1go terminu ściennego rozmnożona przez 2gi, dlatego wyciągając tenże 2gi termin, liczba 12 podzieliła się przez rzeczoną dwóykę, to jest przez 4, a wieloraz 3 położył się za termin 2gi. Albowiem każdy produkt wypada z mnożenia dwóch liczb, z których mając jedną wiadomą i dzieląc przez nią tenże produkt znajduje się 2ga niewiadoma, co się i tu uczyniło, iako przez się rzecz widoczna, więc i tego terminu wyciąganie było dzieleniem czynionym przez nowo znalezionej dzielnika

w skła-

w składzie liczby czworogrannéy. Dlatego zaś przy tymże dzielniku położył się wieloraz czyli termin 2gi ścienny, żeby, mnożąc przez niego samego całą liczbę 43, wypadła w produkcie dwójka 1wszego terminu ściennego rozmnożona przez 2gi z czworogranem tegoż 2go, i żeby obydwie te produkta odciągnięte były od reszty danego czworogranu, w którym są umieszczone; (co się jedynie czyni dla porządnego i krótszego działania) więc i 3ci przepis na regułach dzielenia i składzie wewnętrznym czworogranów zaśladowany jest niezawodny. *Potrzebie:* Przepis 4 równie pewny jest iako i 3ci, ponieważ na iednymże z nim działaniu zaśladowa się, i tćm tylko od niego różni się: że każe dwa terminy 1wsze ściany wyciągnięte brać za ieden, a 3ciego szukać tak, iak 2go, dzieląc resztę danego czworogranu przez nowego dzielnika z dwójki dwóch terminów zrobionego, a tak i tu oczywista: że wyciąganie ściany jest dzieleniem z składem i rozbiorem czworogranów zgodnćm. *Poczwarte:* Przepis 5. tenżć sam jest, którego się w zwyczajnćm liczb dzieleniu trzymamy, gdzie jeżeli dzielnik w liczbie podzielnćy nie mieści się ani razu, za wieloraz piszemy 0, a do liczby podzielnćy następną składamy figurę *i t.d.*

Przepis ostatni przez się iasny. Jeżeli bowiem wynosząc łomaną liczbę do 2go stopnia, wynosiemy naprzód licznika, potćm mianowni-

ka



ka, iako się mówiło w § 11, toć wyciągając z nięć ścianę czworograną, wyciągnąć ją powinniśmy naprzód z licznika, toż z mianownika.

*Przeestroga* 1. Gdyby w danym czworogranie po ostatniem odciągnięciu reszta iaka została; znakbyto był: iż dany czworogran nie jest doskonały i ściana jego nie jest rzeczywista, czyli taka, któraby się mogła wyrazić liczbą; więc w tym razie trzeba wyciąganie ściany kontynuować przez przybliżanie, *per approximationem*, co się następującym sposobem robi. Niech będzie dana liczba niedoskonale czworogranna 147, z której podług daney nauki ścianę  $\equiv 12$  wyciągnąwszy, zostanie reszta  $\equiv 3$ , którą obracam na frakcyą mającą za mianownika 1, potem przydaję do licznika i mianownika po parze, lub po tyle par cyfer, ile mi się podoba, stanie się frakcyą  $\frac{300}{100} \equiv 3$ , to jest równa reszcie, która była została, dopiero wyciągam ścianę czworograną pojedynczo z licznika i z mianownika podług danych przepisów, cyfry biorąc zawsze za przyłączoną przedziałkę, to jest: wzięwszy naprzód licznika 30,0, dwie 1wsze krótką odłączone liczby dzielę przez dwójkę ściany wynalezionę 12 czyli przez 24, wieloraz  $\equiv 1$  będzie licznikiem frakcyi nowy termin ścienny wyrażać mający, mianownikiem zaś nowym będzie wyciągniona z 1wszego mianownika 100 ściana  $\equiv 10$ , azatém

wzmian-

wzmiankowanego niedoskonałego czworogrannu ściana dotąd ciągniona będzie  $= 12 \frac{1}{10}$ , ale że i po tém odciągnięciu zostaje reszta 59, gdyż przez Przepis 3ci, do dzielnika 24 przyłączając wieloraz 1 tak, żeby się stała liczba  $= 241$ , a tę liczbę, bez mnożenia ię przez tenże sam wieloraz, bo 1 nie mnoży, odciągając od 300, zostaje reszta 59, w której ukryta ieszcze jest iakaś częśćka ściany czworogrannéy. Szukając ię więc przez przybliżanie, dodając znowu tak do reszty téy, iako i do mianownika 1wszego tyle par cyfer, ile przedtém, będzie frakcyja  $\frac{5900}{10000}$ ; tego już mianownika ściana czworogranna jest  $= 100$ ; z licznika zaś wyciągniona tak, iak piérwéy, będzie  $= 2$ . Albowiem napisawszy tak, iak przedtém 590,0, i 590 podzieliwszy przez dwóykę terminów ściennych wynalezionych to jest: przez 242 (biorąc z całkowitemi razem i licznika frakcyi) wypadnie wieloraz  $= 2$  za licznika nowego terminu ściennego frakcyją także wyrażać się mającego, azatém ciągniona dotąd ściana będzie  $= 12 \frac{1}{10} \frac{2}{100}$ . Lecz i tu ieszcze jest reszta  $= 1056$ , w której częśćka iakaś ściany ukryta jest. Reszta ta taką wyrazi się frakcyją  $\frac{105600}{1000000}$ , której mianownika ściana jest  $= 1000$ , z licznika zaś wyciągnawszy podług przepisów danych, będzie  $= 4$  i t. d. bez końca.

*Przeſtroga 2.* chcąc doſwiadczyć ſciany wyciągnionéy, wynieść ją trzeba do 2go ſtopnia, a reſztę, ieżeli iaka przy ciągnięciu zoſtała,

została, do tegoż stopnia przydać, stopień ten jeżeli dany wróci czworogran, znakiem będzie: że ściana dobrze z niego wyciągnięta.

## § XII. O składzie i rozbiórce Sześciogranów liczbowych.

I. Chcąc gruntownie poznać skład wewnętrzny sześciogrannej liczby, potrzeba naprzód wiedzieć: z wielu terminów ma ścianę swoją złożoną taż liczba, powtóre: iak te terminy ściennie do składu ię wewnętrznego wpływają. Co do iwszego, nie łatwieyszego, iak dowiedzieć się o liczbie terminow ściany sześciogrannej. Podzieliwszy bowiem dany sześciogran tak, żeby w każdéj przedziałce po trzy były liczby (prócz ostatniéj z lewéj strony przedziałki, gdzie dwie lub jedna tylko być może) tyle niepochybnie będzie terminów ściennych, ile przedziałek w danym sześciogranie. Przyczyna tego iest ta: iż sześciograny wypadają z mnożenia, kiedy liczba iaka za ścianę sześciogranną wzięta mnoży się naprzód przez siebie samą, potem przez produkt z iwszego mnożenia wypadły; toć ile figur w takiéj liczbie czyli ścianie iest, tyle szczególnych produktów z mnożenia wypadać musi, aże te szczególne produkta są częściami składającemi sześciogran, toć tyle tych części czyli przedziałek w sześciogranie być powinno, ile iest figur w liczbie mnożący za ścianę sześciogranną wziętý, i przeciwnie,  
ile

ile części czyli przedziałek , tyle figur w ścianie sześciogranney. Co z natury samego mnożenia wypływa. Co do 2go; żeby się dowiedzieć: iak terminy ściennie do wewnętrznego składu liczby sześciogranney wchodzi , i żeby ie w nię widocznie pokazać ; trzeba wziąć formułę w § VII. opisaną , to jest:  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  wyrażającą części , z których się składa dłonały sześciogran mający dwukrotną czyli: I. ze dwóch terminów złożoną ścianę  $a + b$ . Formuła ta widocznie pokazuje skład całej sześciogranney liczby mającey ścianę z 2 terminów złożoną , to jest pokazuje : że przerzeczona liczba ma w sobie I. sześciogran i wszego terminu ściennego wyrażony przez  $a^3$ . II. Ma troisty czworogran tegoż i wszego terminu rozmnożony przez termin 2gi , co się wyraża przez  $3a^2b$ . III. Ma ielcze troisty termin i wszy rozmnożony przez czworogran terminu 2go , co się wyraża przez  $3ab^2$ . IV. Ma nadto sześciogran terminu 2go wyrażony przez  $b^3$ . Skąd łatwo i to wniesć można: że i wża z tych części to jest sześciogran terminu i wszego zawierać się musi w pierwzhey przedziałce danego sześciogranu , 2ga w reście i wshzey przedziałki i w i wshzey figurze 2gięy przedziałki , 3cia w reście téyże i wshzey figury i w całej 2gięy , 4ta w pozostałéy reście przedziałki 2gięy. Skład ten da się jasnie widzieć w następującym przykładzie:

Wzór



Wzór składu.

Sześciogr: Sciana.  
(12, 167) 23.

- I. Sześciogran termin: 1go  
to jest:  $20 \times 20 \times 20 = 8000$
- II. Troisty Czworog: term:  
1go rozmnożony przez 2gi  
to jest:  $1200 \times 3 = 3600$
- III. Troisty term: 1wszy przez  
2go czworogran rozmnożo:  
to jest:  $60 \times 9 = 540$
- IV. Sześciogr: term: 2go to  
jest:  $3 \times 3 \times 3 = 27$ .

---

Summa tychże części = 12167.

II. Z równą łatwością odkryć można części i w takim sześciogranie, którego ściana jest ze 3<sup>1</sup> terminów złożona, o tém tylko pamiętać tu potrzeba; żeby w 1wszych dwóch przedziałkach odkrywszy części 1wszych zóch terminów ściennych, to jest sześciogran 1go terminu ściennego, troisty czworogran terminu 1wszego rozmnożony przez termin 2gi, troisty termin 1wszy rozmnożony przez czworogran 2go, i sześciogran tegoż 2go terminu; żeby mówić, dla pokazania pozostałych w danym sześciogranie części brać dwa 1wsze terminy ściany znalezionej za ieden, a 3ci jeszcze niewiadomy za 2gi, i znowu nowe terminy podobnie, iak piérwéy, odkrywać w reszcie przedziałki 2giéy i w 3ciéy całéy przedział-

ce, to iest: pokazać tam troisty czworogran  
1wszego terminu (dwa za ieden biorąc) roz-  
mnożony przez 2gi (którym tu będzie 3ci)  
potém troisty termin 1wszy rozmnożony przez  
czworogran 2go, nakoniec sześciogran 2go  
terminu. Rozbiór ten snadniéy i bez omył-  
ki poydzie, zażywaiąc do niego formuły o-  
gólnéy. Niech będzie np:

Formuła.

Sześciogran. Sciana.

(11,390,625) 225.

I. Biorąc pojedynczo 2

terminy ściennie, bę-

dzie:  $a^3 = 8000000.$

II. \*  $3a^2b = 2400000.$

III. \*  $3ab^2 = 240000.$

IV. \*  $b^3 = 8000.$

V. Biorąc dwa 1wsze za

ieden, będzie:  $3a^2b = 726000.$

VI. \*  $3ab^2 = 16500.$

VII. \*  $b^3 = 125.$

---

Summa = 11 390 625.

Gdzie I.  $a^3$  pokazuje sześciogran 1wsze-  
go terminu ściennego 2 czyli  $200 \times 200 \times 200$   
 $= 8,000,000.$  II.  $3a^2b$  wyraża troisty czwo-  
rogran tegoż terminu 1go rozmnożony przez  
2gi to iest:  $1200000 \times 20 = 2,400,000.$  III.  
 $3ab^2$  pokazuje troisty termin 1wszy rozmno-  
żony przez czworogran terminu 2go to iest:  
 $600 \times 400 = 240,000.$  IV.  $b^3$  pokazuje sze-  
ściogran terminu 2go to iest:  $20 \times 20 \times 20 =$   
 $8000.$  V.  $3a^2b$  wyraża troisty czworogran

E

dwóch

dwóch terminów 1wżych za ieden wziętych rozmnożony przez termin 3ci za drugi wzięty to jest:  $145200 \times 5 = 726,000$ . VI.  $3ab^2$  wyraża troisty termin 1wży, wzięwszy za ieden dwa, rozmnożony przez czworogran 2go to jest:  $660 \times 25 = 16500$ . Naostatek  $b^3$  pokazuje sześciogran 2go terminu ściennego to jest liczby 5, który jest  $= 125$ , a te wszystkie części wiednę sumę zniesione przywracają dany sześciogran.

III. Podobnym sposobem pokazać można skład sześciogranu mającego ścianę z 4.i więcej terminów złożoną, byle brać naprzód 2 1wżze terminy ściennie pojedynczo, potem 1wżze 2 razem za 1, a 3ci za 2gi; toż 3 razem 1wżze za jeden, a 4ty za 2gi i t. d. do całej téy roboty tak używając formuły, iako się pokazało w 1. przykładzie. Niech będzie ieszcze.

Formuła.	Sześciogran.	Scianna.
	1,869,959,168.	1232.
I. $a^3 =$	1 250 000 000	
$\ast 3a^2b =$	6 000 000 000	
$\ast 3ab^2 =$	1 200 000 000	
$\ast b^3 =$	8 000 000 000	
II. $3a^2b =$	1 296 000 000	
$\ast 3ab^2 =$	3 240 000 000	
$\ast b^3 =$	2 700 000 000	
III. $3a^2b =$	90774 000	
$\ast 3ab^2 =$	1476 000	
$\ast b^3 =$	8 000	
<hr/>		
Summa $=$	18 699 591 68.	

§ XIII. Jak się wyciąga ścianą sześciogranną z daney w trzecim stopniu liczby?

I. Mając wiadomy skład liczby sześciogranney, nie dozna się żadney trudności w wyciąganiu ściany jéy. Do tego bowiem dość będzie mieć przed. oczyma Formułę sześciogranną:  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  i podług następujących przepisów działać.

*Przepis 1.* Dany sześciogran określiwszy i na części tak podzieliwszy, żeby w każdéy przedziałce po 3 były liczby, iako się powiedziało; brać trzeba 1wszą z lewéy strony przedziałkę, gdzie się mieści sześciogran 1wszego terminu ściennego wyrażony przez  $a^3$ , a tego poszukawszy na tabliczce pod § X. położoney, i równy albo blisko przychylaiący się tam znalazłszy, ścianę iego tamże znajdującą się za 1wszym termin ścienny napisać, iego zaś samego od 1wszéy przedziałki odciągnąć, i resztę pod liniyką zanotować.

*Przepis 2.* Do reszty, jeżeli iaka została, zgą złożyć przedziałkę, a jeżeli żadney nie ma sz reszty, samą przedziałkę zgą niżej spuścić i dwie ostatnie figury kręską odciąć, gdzie się 3 części ścienne zawierają, to jest: troisty czworogran terminu 1go ściennego rozmnożony przez 2gi, troisty termin 1wszy rozmnożony przez czworogran 2go, i sześciogran 2go terminu, czyli:  $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ , azatém chcąc wynaleść termin 2gi ścienny, trzeba re-

E2

szte



szte iwszýy przedziałki i iwszą figurę zgięty  
 podzielić przez  $3a^2$  to jest przez tróisty czwo-  
 rogran terminu iwszego ściennego już znale-  
 zionego, wieloraz będzie zgim terminem  
 ściennym, który mając, trzeba przerzeczone  
 wszystkie 3 części z wynalezionych dwóch ter-  
 minów ściennych porobić, to jest *naprzód*: z i-  
 wszego terminu ściennego zrobiony czwo-  
 rogra i trzy razy wzięty rozmnożyć przez ter-  
 min  $2gi$ , a produkt ten tak pod resztą iwszýy  
 przedziałki i pod przedziałką  $2gą$  pisać, żeby  
 ostatnia jego figura padła pod iwszą figurę  
 zgięty przedziałki; *potóm*: z  $2go$  terminu  
 ściennego zrobiony czworogran rozmnożyć  
 przez tróykę terminu iwszego, a produkt ten  
 tak znowu pisać, żeby ostatnia jego figura  
 padła pod drugą figurę zgięty przedziałki, *po-  
 trzecie*: szesciogran z  $2go$  terminu zrobiony  
 pisać tak, żeby ostatnia jego figura była pod  
 ostatnią figurą téż przedziałki zgięty. *Na-  
 ostatek*: trzy te produkta w iedną sumę ze-  
 brać, i od resztzy tak iwszýy przedziałki,  
 jeżeli jest iaka, iako i zgięty odciągnąć, a ie-  
 żli dokonały jest szesciogran dany i dwie tyl-  
 ko ma w sobie przedziałki, ściana jego ze z  
 terminów złożona tym sposobem zupełnie bę-  
 dzie wyciągniona. Gdzie pilnie uważać po-  
 trzeba tak rzeczoną sumę, iako i resztę,  
 żeby iwsza od zgięty albo mnieysza była, albo  
 iey równa, inaczey znak będzie: że dzielnik  
 nie tyle razy mieści się w podzielný lic-  
 bie,

bie, ile jest brany; przeto wieloraz trzeba zmniejszyć iednością i na nowo szukać produktów.

*Przepis 3.* Jeśli 3cia ieszcze jest przedziałka w danym sześciogranie, tedy ta do reszty, jeżeli iaka została, przyłączona zamykać w sobie będzie I.  $3a^2$ , to jest troisty czworogran 1wżego terminu ściennego (ale tu już za 1wży termin brać trzeba obydwie 1wżę wynalezione) rozmnożony przez termin  $2gi$ , którym w tym razie będzie termin 3ci ścienny ieszcze niewiadomy; II.  $3ab^2$ , to jest czworogran terminu  $2go$  (którym tu będzie 3ci, iak się rzekło) rozmnożony przez troisty termin 1wży ze dwóch złożony; III.  $b^3$  to jest: sześciogran terminu  $2go$ , którym będzie 3ci ieszcze niewiadomy, azatém chcąc go wynaleść, trzeba resztę, jeżeli jest iaka, 2gię przedziałki i 1wżą figurę 3cię przedziałki krótką odłączoną podzielić przez:  $3a^2$  czyli przez troisty czworogran terminu  $1go$ , dwa razem za ieden biorąc, wieloraz stać wypadły da termin 3ci ściany sześciogranney. Ten już mając, znowu sposobem w  $2gim$  przepisie podanym troisty czworogran terminu 1wżego (biorąc zawsze dwa za ieden) rozmnożyć przez termin  $2gi$  tak piąć pod resztą 2gię i pod 1wżą figurą 3cię przedziałki, żeby ostatnia jego figura była pod 1wżą figurą przedziałki 3cię, a czworogran  $2go$  terminu rozmnożony przez troisty termin 1wży żeby

miał

miał ostatnią swą figurę pod przedostatnią figurą téż przedziałki, pod ostatnią zaś sześciogran 2go terminu, które to części w jedną sumę znieśione i od reszty 2gię i 3cię przedziałki odciągnione nie zostawiając innę resztę, pokażą: że ściana trzykrotna zupełnie wyciągniona.

*Przepis 4.* Podobnym sposobem wyciąganie ściany ze czterech lub więcej jeszcze figur złożonęj odprawi się, byle przystępując do 4tęj przedziałki, trzy i wśze terminy ściennę wynależione za jeden się brały, to jest za 1wży, a 4ty niewiadomy za 2gi termin, przystępując zaś do przedziałki 5tęj, żeby cztery wiadome za 1wży, a 5ty niewiadomy za 2gi termin był brany *it. d.*

*Przepis 5.* Jeżeli w ciągnięciu ściany sześciogranney zdarzy się: iż trojaki czworogran terminu 1wżego ściennego większy będzie nad liczbę przez niego dzielić się mającą, natenczas za wieloraz czyli za nowy termin ścienny pisze się 0, a do liczby podzielney następująca przyłącza się przedziałka, która, dwie ostatnie figury odciawszy, dzieli się przez trojaki czworogran wszystkich wiadomych ściennych figur za 1wży termin wziętych, a wieloraz pisze się za nowy termin ścienny. Obaczmy użycie tych przepisów w przykładach.

*Sześciogran I. 1. 1. 1. 1. 1. 1. Sciana.*

(12, 167.) 23.

- A. 8  
—  
B. 41, 67  
C. 12  
—  
D. 36.  
E. 5 4.  
F. 27.  
—  
G. 41 67.  
—

Przy A jest sześciogran z tabliczki wzięty.  
Przy B 1wsza liczba 4 jest reszta po odciągnięciu 8 od 12, inne liczby są z przedziałki 2gię, z których 2 ostatnie krótką są odłączone.

Przy C jest troisty czworogran 1wszego terminu ściennego czyli liczby 2, przez który reszta 1wszcy przedziałki i pierwsza figura 2gię przedziałki, czyli liczba 41 podzielona za wieloraz daje 2gi termin ścienny 3.

Przy D jest troisty czworogran terminu 1wszego ściennego rozmnożony przez 2gi, i tak napisany, że ostatnia jego figura 6 pada pod 1wszą figurę przedziałki 2gię to jest pod 1.

Przy E jest czworogran terminu 2go rozmnożony przez troisty termin 1wszy to jest: 54 i tak napisany: że ostatnia jego figura 4 jest pod przedostatnią figurą przedziałki 2gię.

Przy

Przy F iest sześciogran terminu 2go ściennego,  
przy G summa tych produktów równa reszcie B,  
ściana więc  $= 23$

	Sześciogran H.	Sciana
	(30,371,328)	312.
A.	27	
	<hr/>	
B.	3,371	
C.	27	
	<hr/>	
D.	27	
E.	9	
F.	1	
	<hr/>	
G.	2791	
	<hr/>	
H.	5803,28	
I.	2883	
	<hr/>	
L.	5766	
M.	372	
N.	8	
	<hr/>	
O.	580328.	

W tym przykładzie i wŹe dwa terminy ścienn-  
ne 31 tak są ciągnione iak ściana dwukrotna  
w przykładzie i wŹym, i od A aż do H nie  
maŹ nic tylko części pojedynczych 2 termi-  
nów ściennych wyrażonych przez  $a^3 + 3a^2b$   
 $+ 3ab^2 + b^3$ , po których odciągnięciu do po-  
zostałéy reszty 580 przyłącza się 3cia prze-  
działka 328, gdzie oŹatnie dwie figury kré-  
Źką się odcinają.

Przy I



Przy I jest troisty czworogran 1wszych 2ch terminów ściennych za ieden wziętych, przez który reszta 2gię przedziałki i 1wsza figura 3cię czyli liczba 5803 dzieli się, a wieloraz 2 za 3ci się termin ścienny pisze.

Przy L jest troisty czworogran terminu 1wszego ściennego (dwa tu już biorąc za ieden) rozmnożony przez termin 2gi to jest przez figurę ścienną 3cią, którego ostatnia figura przypada pod 1wszą podziałki 3cię.

Przy M jest czworogran terminu 2go czyli figury ścienné 3cię rozmnożony przez troisty termin 1wszy ze dwóch złożony, którego ostatnia figura jest pod przedostatnią przedziałki 3cię.

Przy N jest sześciogran 2go terminu czyli figury 3cię ścienné, którego ostatnia figura kładzie się pod ostatnią figurą téż przedziałki.

Przy O jest summa tych produktów, po której odciągnięciu od reszty przedziałki 2gię i od całej trzecię przy H położoné, gdy nic nie zostaje, znak jest: iż wyciągniona z danego sześciogranu ściana jest  $\equiv 312$ .

*Szeście-*

## Sześciogran III, Sciana.

	(27,270,901)	301.
A.	27	
B.	2,70	
C.	27.	
D.	2709,01.	
E.	2700	
F.	2700	
G.	90	
H.	I	
I.	270901	

W tym przykładzie daje się widzieć potrzeba zachowania Przepisu 5tego. Albowiem po odciągnięciu bez reszty sześciogranu 1wszego terminu ściennego od przedziałki 1wszey, złożony przy B przedziałkę 2gą, i 1wszą ięć figurę kręską odłączysz, widzisz: że liczby 2 przez troisty czworogran terminu 1wszego przy C położony dzielić nie można dlatego: że ten dzielnik większy jest nad liczbę podzielną; więc napisawszy za 2gi termin ścienny 0, do 2giey przedziałki przyłączam 3cią przy D i kręską odciągawszy dwie ostatnie figury, 1wsze dzielę przez troisty czworogran dwóch ścian wynalezioney terminów to jest przez 2700, a wieloraz 1. piszę za 3ci termin ścienny, toż troisty

troisty czworogran i wŹyeh dwuoh terminuow  
30 za ieden wzieytyeh rozmnozony przez ter-  
min 2gi to iest przez 1 z czworogranem 2go  
terminu rozmnozym przez troisty termin  
1wŹy, tudziez z szeŹciogranem terminu 2go  
w iednę sumę zebrałŹy przy I, odciaęam  
od obydwuoh przedziałek przy D położonych,  
po ktorém odciaęnieniu gdy nic nie zostaje,  
Źciana danego szeŹciogranu = 301.

*SzeŹciogran IV. Sciana.*

(1,8 69,959,168) 1232.

I

8,69

3

6

12

8

728

A. 1419,59

432

1296

324

27

B. 132867

C. 90921,68

D. 45387

E. 90774

F. 1476

G. 8

H. 9092168.

W tym przykładzie wyciągnąwszy 3 terminy sposobem dopiero pokazanym i liczby przy B położone od położonych przy A odciągnąwszy, do reszty przy C napisanév przydana jest przedziałka 4ta, gdzie liczby 1wsze krótką oddzielone przez troisty czworogran terminu 1wszego ściennego (wszystkie trzy razem biorąc za ieden) położony przy D dzieląc, wieloraz 2 pisze się za 4ty termin ścienny, toż troisty czworogran 1wszego terminu ściennego czyli wszystkich trzech 1wszych rozmnożony przez ostatni termin 2 przy E, a czworogran terminu ostatniego 2 rozmnożony przez trójkę wszystkich trzech 1wszych przy F, tudzież sześciogran tegoż terminu 2 przy G napisałwszy, wiedąc się zbierają sumę przy H, która odciągniona od reszty 3ciéy i całéy 4téy przedziałki żadnéy nie zostawuje reszty, azatém ściana = 1232.

II. Jest i drugi sposób wyciągania ściany sześciogrannéy krótszy i łatwiejszy, iako się zdaje, którego pospolicie Rachmistrze używają, ale ten zasadza się na 1wszym iako jasniejszym i gruntowniejszym. Jest zaś taki, *naprzód*: wynalazłszy 1wszy termin ścienny tymże samym sposobem, który jest podany w przepisie I, i sześciogran iego od 1wzéy przedziałki odciągnąwszy, do reszty składa się 1wszy tylko termin 2giéy przedziałki; *potóm*: reszta, ieżli iaka została, i złożona 1wsza figura przedziałki 2giéy dzieli się przez troisty

CZWO-

Czworogran terminu 1wszego ściennego znalezione-  
go, a wieloraz, za 2gi się termin ścienny pisze, toż z obydwóch terminów ściennych zrobiwszy sześciogran, od obydwóch razem wziętych przedziałek danego sześciogranu odciąga się, i reszta się notuje; *potrzecie*; do téj reszty, jeżeli jest iaka, składa się znowu następujący przedziałki 1wsz figura, i dzieli się przez troisty czworogran obydwóch terminów razem wziętych ściany znalezionej, wieloraz da 3ci termin ścienny, z których wszystkich trzech zrobiony sześciogran i od wszystkich 3ech przedziałek odciągniony kończy działanie, jeżeli 3 tylko były przedziałki; *poczwarcie*: jeżeliby zaś więcej ich, niż 3 było w danym sześciogranie, wtenczas po 3ciem odciągnięciu sześciogranu 3 terminów ściennych, do reszty pozostałej znowu się składa następujący przedziałki 1wsza figura, i znowu dzieli się przez troisty czworogran wszystkich znalezionych terminów i t. d. Niech będzie

*Sześciogran dany.*

*Sciana.*

( 12, 167 )

23

A.

8

B.

41

C.

12

D.

12 167.

Przy A jest sześciogran z tabliczki wzięty, którego sciana 2 jest 1wizym terminem ściennym.

Przy



Przy B jest reszta po odciągnięciu tegoż sześciogranu od iwszég przedziałki, i przyślączona do niég iwsza figura przedziałki zgiég.

Przy C jest troistý czworogran iwszego terminu, przez który podzielona liczba leżąca przy B daje zgi termin ścienny to iest 3. Nakoniec przy D iest sześciogran z obydwóh terminów ściennych zrobiony, który że iest równy danemu, nic po jego odciągnięciu nie zostaje, azatém ściana wyciągniona = 23.

	Sześciogran dany.	Ściana.
	( 11,390,625 )	225.
	8	
A.	33	
B.	12	
C.	11390	
D.	10648	
E.	7426	
F.	1452	
G.	11390625.	

Przy A iest reszta iwszég, i iwsza figura zgiég przedziałki.

Przy B iest troistý czworogran terminu iwszego ściennego, przez który liczba przy A podzielona daje termin zgi ścienny. Przy C

śa

szę dwie 1wsze przedziałki danego sześciogranu, od których sześciogran z 1wżych dwóch terminów ściennych to jest ze 22 zrobiony i przy D położony odciągnąwszy, reszta 742 przy E kładzie się a do nię przyłączą się 6 1wsza figura przedziałki 3cię. Ta zaś liczba cała przez trojaki czworogran 1wżych 2 terminów ściennych położony przy F podzielona daje 3ci termin ścienny, z których wszystkich 3 razem wziętych zrobiwszy sześciogran położony przy G, i odciągnąwszy od danego; nic nie zostaje, azatém ściana = 225.

*Przeştroga.* Drugi ten sposób wyciągania ściany sześciogrannę, acz zda się być od 1wżego nieco łatwiejszy, w rzeczy samę jest zamatwany i bez wiadomości igo nie może jasnie być okazany, dotego równie albo i bardziej zatrudniający robieniem pokilkokrotnie sześciogranów, przeto tamtego'raczę trzymać się radzę, którego niezawodność zaraz się okaże.

### Okazanie danych Przepisów.

Przepisy te zasadzają się na wewnętrznym sześciogranów składzie, który formuła ogólna:  $a + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$  wyraża, iako jest oczywista. Wyciągać albowiem 1wżym zwłaszczą sposobem ścianę sześciogranną nie innego nie jest, tylko odkrywać (sposobem dzielenia wyciąganiu ścian czworogrannych podobnym) ka-  
żdą

żdą zosobna część dany sześciogran składającą, i z niey każdego zosobna terminu dochodzić ściennego. Co we wszvstkich danych przykładach na oko się pokazało. Ale weźmy ieszcze ieden sześciogran i przytosoimy wyciąganie z niego ściany do wewnętrznego jego składu w § XII. odkrytego.

*Skład Sześciogranu. Wyciąg: ściany. Sciana.*

11,390,625. (11,390,625) 225.

I.  $a^3 = 8\ 000\ 000$ . A. 8

B. 33,90

C. 12

$\ast 3a^2b = 2400000$ . D. 24

$\ast 3ab^2 = 240000$ . E. 24

$\ast b^3 = 8000$ . F. 8

G. 2648

H. 7426,25

I. 1352

II.  $3a^2b = 726000$ .

$\ast 3ab^2 = 16500$ . K. 7260

$\ast b^3 = 125$ . L. 1650

M. 125

Sum: = 11,390,625 N. 742625

I. Wyciągając ścianę z danego sześciogranu, brałem i wiza przedziałkę i przychyłający

jący się do liczby 11 sześciogran 8 znalazłszy w tabliczce, ścianę jego 2 za 1wszy termin ścienny położyłem. Lecz coż to jest ten sześciogran, ieżli nie 1wsza część danego sześciogranu przez  $a^3$  wyrażona?

II. Odciągnąwszy 8 od 1wszój przedziałki, do reszty przy B położonój przydałem 2gą przedziałkę 350, w którój że się nieszczą części przez  $3a^2b + 3ab^2 + b^3$  wyrażone, podzieliłem liczby w niój kręśłą odcięte przez  $3a^2$  czyli przez troisty czworogran terminu 1go ściany znalezionej, który jest przy C, i znalazłem 2gi termin ścienny 2; potem tenże troisty czworogran terminu 1wszego rozmnożony przez termin 2gi to jest: 24 tak napisałem pod resztą 1wszój przedziałki i pod 2gą przedziałką przy D, żeby ostatnia jego figura 4 przypadła pod 1wszą figurę przedziałki 2giój, a pod 2gą ostatnia figura czworogranu terminu 2go ściennego rozmnożonego przez troisty termin 1wszy, pod 3cią zaś sześciogran tegoż 2go terminu, lecz czyż części dany sześciogran składające wyrażone przez  $+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  nie też same są i nie tak przypadają? wżak i tam 4 pod 3, drugie 4 pod 9, 8 pod 0 tak, jako przy D, E i F.

III. Części te w iedną summę zebrane przy G i od liczby B odciągnione zostawują resztę H, do którój 3cią przyłączyłem przedziałkę, a wiedząc: że w tój reszcie i przyłączonój przedziałce mieszczą się drugie części danego

F

sześciog-

sześcioгранu przez 11.  $3a^2b + 3ab^2 + b^3$  wyrażone, wziąłem dwa 1włże terminy ściennie już znalezione za jeden to jest 22, i zrobiwłży z nich  $3a^2$  to jest troisty czworogran, podzieliłem przez niego liczby H krótką odcięte i znalazłem 3ci termin ścienny  $= 5$ . Mając zaś włżyłskie 3 terminy ściennie uważałem: czy troisty czworogran dwóch za jeden wziętych terminów ściennych rozmnożony przez termin 3ci wzięty za 2gi, i tego znowu czworogran rozmnożony przez trójkę tamtych, nareście sześciogran terminu ostatecznego, czy, mówię, w reście 2giey i całej 3ciey przedziałce mieszczą się, przeto te 3 produkta tak napisałem: że 1włżego ostatecznia figura pod 1włżą przedziałki 3ciey padła, 2go pod 2gą, 3go pod 3cią; aże i wkładzie danego sześciograna części 2gie przez  $3a^2b + 3ab^2 + b^3$  wyrażone także są i tak rozłożone, iż zupełnie tym trzem produktom odpowiadają, iako każdy widzi, więc wyciąganie ściany sześciogrannéy załadza się na wewnętrzny składzie danych sześciogranów, a zatem zawodne bydz wcale nie może.  
C. B. D. O.

*Przeestroga.* Gdyby z danego sześciogranu po odciągnięciu ostateczniém reszta iaka zostawała, znakbyto był: iż dana liczba sześciogranna nie jest doskonałym sześcioгранem, a zatem ściana jego ciągnąć się może przez przybliżenie (*per approximationem*) tym samym sposobem, który w Przeestrodze I. pod § XI. opisany z tą różnicą: że tam parami, a tu tróy-



trójkami cyfry do frakcyi przydają się, i tam przepis dane na wyciąganie ściany czworogrannéy, a tu dane na wyciąganie ściany sześciogrannéy zachowują się. Przykład następujący może być wzorem takiego ścian wyciągania.

*Sześciog: niedoskonały. Sciana przybliżająca się.*

(9,471)

$21 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000}$

8

1 471

1 2

1 2

6

1

1 2 6 1

A. 2 1 0 0,00

B. 1,000

C. 1 3 2 3

D. 1 3 2 3

6 3

1

1 3 2 9 3 1

E. 7 7 0 6 9 0 0 0

F. 1 0 0 0 0 0 0

F<sub>2</sub>

W tym

W tym przykładzie po wyciągnięciu dwóch terminów ściennych 21 pozostała reszta A obrócona na frakcyą i trzy tak do licznika A, iako do mianownika B cyfry przydane. Przy C trojaki czworogran terminu i wszęgo (obydwa wyciągnięte za jeden biorąc) iest dzielnikiem licznika A, po którego podzieleniu wieloraz 1 pisze się za licznika frakcyi nowy termin ścienny wyrażający, a za mianownika pisze się ściana z mianownika B wyciągnięta  $= 10$ . Po niżej D kładą się trzy produkta z 3 terminów ściennych 211, przyłączając licznika frakcyi  $\frac{1}{10}$  do terminów całkowitych, a summa ich od liczby A odciąga się. Reszta E znowu na frakcyą się obraca inne trzy cyfry tak do licznika E, iako do przeszłego mianownika B przy F położonego przydawwszy; a tak znowu z mianownika F wyciągnięta ściana  $= 100$  za nowę frakcyi mianownika kładzie się, a licznik ię 5 z liczby E wyciąga się podług przepisów danych *i t. d.*

§ XIV. *Z daney liczby iakiegokolwiek byteż naywyższego stopnia wyciągnąć ścianę.*

Poprzedzające o wyciąganiu ścian czworogrannych mającemu wiadomości bez trudności przyydzie wyciąganie ścian wyższostopniowych. Trzeba l. w danym iakimkolwiek stopniu porobić przedziałki tyle figur zawierające, ile wykładnik danego stopnia ma w sobie iedności, to iest: iezeli wykładnik iest 4 lub 5, prze-

przedziałki mieć powinny figur 4 lub 5 *i t. a.*  
 II. Z tabliczki pod § X. położonéy wziąć ścianę stopnia w 1wszém przedziałce zawartego, albo iemu naybliższego, i tę ścianę za 1wszy termin ścienny położyć, a ięć stopień z tabliczki wzięty od przedziałki 1wszém odciągnąć.  
 III. Pierwszy termin ścienny wynaleziony wynieść do stopnia iedności mnieyszego od stopnia danego *np:* do 4tego stopnia, gdy ściana ma być pięciostopniowa, i nowy ten stopień rozmnożyć przez wykładnika ściany *np:* przez 5, jeżeli ściana iest 5ta, produkt ten będzie dzielnikiem reszty przedziałki 1wszém, jeżeli iaka została, i 1wszém figury kręską odcięty przedziałki zgięć. IV. Wziąć formułę tegoż stopnia, którego się wyciąga ściana, zrobioną z ściany dwukrotnéy  $a \ast b$  *np:* jeżeli ściana wyciąga się pięciostopniowa, wynieść trzeba  $a \ast b$  do 5go stopnia, będzie:  $a^5 \ast 5a^4b \ast 10a^3b^2 \ast 10a^2b^3 \ast 5ab^4 \ast b^5$ . Potém za 1wszy termin ścienny znaleziony założyć a, za wieloraz zaś, który ma być zgim terminem ściennym, założyć b, azatém do którego stopnia wyniesione iest a lub b w każdym terminie rzeczonéy formuły, do tego wynosić i 1wszy termin ścienny i wieloraz z podzielenia reszty 1wszém wypadły; toż obydwie te stopnie przez nich samych mnożyć tak; iak w formule a i b są rozmnożone, *np:* jeżeli w formule iest  $5a^4b$ , więc 1wszy termin ścienny wyniósszy do 4tego stopnia, rozmnożyć trzeba i przez wielo-

raz

raz i przez współczynnika *5 i t. d.* V. Podług téy więc formuły i każdego z osobna terminu jéy szukać produktów iwszych dwóch terminów ściennych, a wynalezione tak iedne pod drugiemu podpisywać, iako się piszą, wyciągając ścianę sześciogranną to iest: żeby przedostatnia figura produktu zgo była pod ostatnią figurą produktu iwszego i tak zawżze, żeby dzieśiatki produktów niższych były pod jednościami wyższych, które to produkta w iedną sumnę zebrane odciągnąć od reszty przedziałki iwszég i zgiég całég. Gdyby zaś summa owa odciążna od liczby, od którég ma być odciążniona, była większa, znakby pewny był: że wieloraz za zgięścienny termin wypadły więkšzy był wzięty, niż należało, azatém trzeba go iednością póty zmniejszać, póki nanowo robione podług formuły produkta i razem dodane nie uczynią mnieyszey summy nad liczbę do odciążnienia daną, albo iég równég.

VI. Do reszty z zgiég przedziałki pozostałég przyłączywszy przedziałkę zcią i iwszą iég z lewég ręki figurę odciąwszy, dzielić, iak przedtém, przez stópień ściany wyciągnionég (biorąc obydwá jég terminy wyciągnięte za ieden) mnieyszy iednością od wykładnika stópnia danego, a przez tego samego wykładnika rozmióžony, formuły używając, iak piérwég.

VII. Jeżeli dzielnik w podzielnég liczbie ani razu nie mieści się, za wieloraz albo nowy termin ścienny piše się 0, a do przedziałki

działki podzielney następująca się spuszcza,  
do dzielnika zaś tyle się cyfer przydaje, ilu  
stopniów wyciąga się ściana zmniejszona ie-  
dnością, np: jeżeli ściana jest 5, do dzielnika  
przydaje się cyfer 4. Niech będzie przykła-  
dem takiego wyciągania.

Liczba Pięciostopniowa.      Ściana.

$$\sqrt[5]{(65,06608,08696,90625)} \quad 2305.$$

$$B. a^5 = 32$$

$$C. \quad 330,6608,$$

$$D. 5a^4 = 80$$

$$E. 5a^4b = 240$$

$$10a^3b^2 = 720$$

$$10a^2b^3 = 1080$$

$$5ab^4 = 810$$

$$b^5 = 243$$

$$F. \quad 3236343$$

$$H. \quad 70265086969,0625$$

$$I. 5a^4 = 13992050000$$

$$K. 5a^4b = 69960250000$$

$$10a^3b^2 = 3041750000$$

$$10a^2b^3 = 66125000$$

$$5ab^4 = 718750$$

$$b^5 = 3125$$

$$L. \quad 702650869690625.$$

Przy



Przy Literze B jest 5ty stopień z tabliczki wzięty, którego ściana z przez Przepis II. jest 1wszym terminem ściany ogólnej. Przy C jest reszta po odciągnięciu tegoż 5tego stopnia od 1wszého przedziałki z przyłączoną 2gą całą. Przy D jest 1wszy termin ścienny do stopnia iednością mnieyszego od danego wyniesiony i rozmnożony przez wykładnika ściany to jest przez 5, a przez ten produkt podzielona wzmiankowana reszta 1wszého i 1wsza figura 2giéy przedziałki daje wieloraz za 2gi termin ścienny  $= 3$ . Przy E są produkty w Przep: V. opisane wypadłe z piérwzych dwóch terminów ściennych podług formuły tak iedne pod drugimi podpilate, że produktów niższych dzieśiątki padły pod iednościami produktów wyższych i t. d. Przy F jest summa tychże produktów, która odciągniona od C zostawiła resztę położoną przy H, do której nie tylko 3cia, ale i 4ta przyłączona przedziałka z przyczyny, o której się zaraz powie. Przy I są piérwsze 2 terminy ścienne za ieden wzięte wyniesione do stopnia mnieyszego iednością od danego stopnia i rozmnożone przez danego wykładnika, a te są dzielnikiem liczby H przez Przep: VI. Ale że ten dzielnik ani razu w liczbie podzielney nie mieści się, przeto za wieloraz czyli za 3ci termin ścienny napisana jest o przez Przep: VII. a do rzeczzonego dzielnika przydane są 4 cyfry, przeto też do liczby podzielney przedziałka ostatnia przyłączona.

Przy K

Przy K są produkta podobne położonym przy E tak wyszukane i napisane iak tamte, z tą jednak różnicą: że tu 3 i wsze terminy ścienniebrane są za ieden, a 4ty za 2gi. Przy L jest summa tych produktów, po który odciągnięciu od liczby H nic nie zostaje, azatém ściana wyciąniona  $= 2305$ .

*Prześtroga.* Gdyby dany w liczbach 4ty lub 5ty stopień był niedoskonały ściana jego mogłaby się ciągnąć przez przybliżanie czyli przez terminy niekończone za pomocą formuły, obróciwszy resztę po ostatniém odciągnięciu pozostałą na frakcyą i przydawszy cyfer tyle, ile wykładnik danego stopnia ma w sobie iedności *i t. d.*

## ROZDZIAŁ IV.

O Pomiarach składanych w ogólności.

§ XV. Wykład potrzebniejszych wyrazów.

I. **P**omiary składanemi nazywają się te, w których niewiadome ilkości są czworogrannne, sześciogrannne, to iest: do 2go, 3go albo do wyższego ieszcze stopnia wyniesione; i tak pomiar:  $x^2 = ab$  iest czworogranny, bo ilkość w nim niewiadoma  $x^2$  wyniesiona iest do 2go stopnia; pomiar zaś  $x^3 = a$  iest sześciogranny, bo ilkość  $x^3$  iest trzeciostopniowa *i t. d.*

II. Składane pomiary bywają i wtenczas, kiedy ilkości niewiadome do nieokreślonego sto-

stopnia wyrażonego literą  $m$  lub  $n$  są wyniesione, tak pomiar:  $x^n = ab$  jest składany lecz nieokręslony, który się określi, gdy się wykładnikowi szczególna iaka cena naznaczy. Będzie zatem  $x^n$  albo czworogranem, jeśli będzie  $n=2$ , albo szesciogranem, jeśli  $n=3$ . *i t.d.*

III. Pomiar składany dwojaki być może to jest albo czysty czyli sam przez się, *aquatio pura*, albo przymiężkowy, *affecta*. Czysty jest, kiedy w nim albo jedna tylko ilkość niewiadoma wyższostopniowa jest albo kilka, ale wszystkie do jednegoż stopnia są wyniesione; takie są pomiary I.  $x^3 = bd$ . II.  $x^2 = p^2 = bd$ . Przymiężkowy zaś jest, kiedy do jednego stopnia ilkości niewiadomej przyłączone są inne stopnie téżże ilkości, np:  $x^2 + ax = ab$ , gdzie  $x$  w pierwszym terminie jest drugostopniowe, a w drugim pierwszostopniowe *i t.d.*

IV. Sciana pomiaru składanego jest cena ilkości niewiadomej zredukowanej do 1go stopnia np: sciana pomiaru:  $x^2 = a$  będzie cena ilkości  $x^2$ , gdy z niej tudzież  $a$  wyciągniona będzie sciana czworogranna, to jest będzie:  $x = \sqrt{a}$ . Tyle bowiem ważyć będzie  $\sqrt{a}$ , ile  $x$ . Ta zaś może być dodatna, albo odciążna. Dodatna bywa, kiedy wyraźny lub domniemany znak  $+$  ma przed sobą, i nazywa się ścianą rzetelną, *radix vera*, odciążna zaś, kiedy wyraźnie położony przed sobą ma znak  $-$ , i nazywa się ścianą nierzetelną czyli fałszywą; *radix falsa*; obydwie atoli przerzeczone ściany są

fą rzeczywiście. Bo gdy np: winenem komu Cz: Zł: 50, a nie mam ich zkąd oddać, mogę mówić: iż mam — 50 czyli długi rzeczywisty. Obie jednak te ściany z pomiaru czworogramnego wyciągnąć się mogą, o czém obszérniéy potém.

V. Kiedy cena niewiadoméy ilkości jest czworogramem odciażnym np:  $x = \sqrt{-a^2}$ , natenczas cena ta czyli ściana, o któręy wyciągnięcie z takiego czworogramu idzie, nazywa się ścianą imiginaryyną czyli niepodobną, *radix imaginaria*, *impossibilis*, gdyż czworogram  $-a^2$  wypaść nie może ani z  $+a \times +a$ , ani z  $-a \times -a$ , iako przez się oczywista i z przepisów na mnożenie ilkości w Części I. Rozdz: I. danych każdemu wiadoma; azatém wyciągnąć z nięgo ścianę czworogramną, rzecz bardziéy niepodobna, niż cyrkul zamienić w czworogram. Pamięć na ten punkt potrzebna będzie w Rezolwowaniu Zagadnień zgo stopnia, gdzie jednak szczególna na to uwaga dana będzie; tymczasem ogólne sposoby redukowania pomiarów składanych krótko się przełożą.

### § XVI. Jakim porządkiem układać terminy pomiaru składanego?

I. Terminy ilkość niewiadomą bądź samotną, bądź rozmnożoną przez inną wiadomą w sobie zamykające trzeba w iednéy pomiaru części mieścić tak, żeby na iwszém miejscu

mieyscu była ta, która do wyższego nad inne jest stopnia wyniesiona, i ta się nazywa 1wszym pomiaru terminem, na drugiem zaś mieyscu niewiadoma iednym stopniem od 1wszey niższa, a ta będzie 2gim terminem *i t d.* W 2gięj zaś pomiaru części kładą się terminy z samych wiadomych ilkości złożone, które, gdyby były z wykładnikami, tym samym porządkiem, co w pierwszey części układać się powinny. Niech będzie pomiar dany:  $3b^2x + 3bx^2 - d - f - x^3$ , porządknie ułożony będzie:  $x^3 + 3bx^2 + 3b^2x - d + f$ .

II. Jeżeli termin najwyższego stopnia jest odciążny to jest ze znakiem —, powinien się obrócić na dodatny, przenosząc go do innéj tegoż pomiaru części, inaczej ściana zwłaszcza czworogranna byłaby niepodobna przez Wykład V, np:  $ax - x^2 = ab - f$ , przenosząc  $-x^2$  owszem i  $ax$  do 2gięj części, a terminy części 2gięj do 1wszey, będzie:  $f - ab = x^2 - ax$ . Czasem wszystkie terminy obydwóch części pomiaru w iedną się kładą i równają z 0, co się niżej często czynić będzie dla łatwiejszey redukcji pomiarów, tak np: pomiar poprzedzający pisać się może:  $a^2 - ax - f + ab = 0$ .

III. Wszystkie terminy, w których niewiadoma ilkość w iednymże stopniu jest, ieden pod 2gim tak właśnie, iak w dodawaniu pisać się zwykły, co się i z wiadomemi czyni, kiedy ich kilka będzie, np:  $x^3 + ax^2 - bx^2 + cx - bx = ab$ .



ab. Pisząc terminy jednośtopniowe jeden pod drugim będzie :

$$\begin{array}{r} x^3 * ax^2 - bx \\ \hline -bx^2 * cx \end{array} = ab.$$

A takie ilkości i tak napisane za iedenże termin brać się zwykły.

IV. Kiedy w składanym pomierze brakuje terminu iakiego, brak ten wyraża się gwiazdeczką, np: w pomierze :  $x^4 * -cx^2 * a^2b = 0$ , gdzie brakuje 2go i 4tego terminu, przez ten atoli brak nie psuje się bynajmnięj porządek terminów, gdyż  $-cx^2$  trzyma 3cie swoje miejsce i  $a^2b$  swoje 5te, choć śródkujących nie dostaje; owszem ani równości między częściami pomiaru taki brak nie szkodzi, gdyż mimo wyciąganie ścian są sposoby, przez które zredukować się taki pomiar może i zagadnienie rozwiązać, o czém niżej.

§ XVII. *Jakie są pomśzechnieysze sposoby redukowania pomiarów składanych.*

I. Gdy współczynnik terminu 1go w pomierze porządnie ułożonym zamyka się raz lub kilka razy spełna w współczynnikach innych terminów, natenczas wszystkie współczynniki liczbami lub literami wyrażone podzieliwszy przez współczynnika 1go terminu, składany pomiar zamieni się w prostszy, np:  $3x^2 * 6ax = ab$ , podzieliwszy przez 3 współczynnika innych terminów, będzie :  $x^2 * 2ax = \frac{1}{3}ab$ .

Tak-

Także:  $ax^2 - 2ax = abc$  przez  $a$  podzieliwszy cały pomiar, wypadnie:  $x^2 - 2x = bc$ . Podobnie:  $4x^3 - 48x^2 + 176x - 192 = 4ab$ , podzieliwszy przez  $4$ , wyjdzie:  $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = ab$  *i t. d.*

II. Trafiają się pomiary składane z wykładnikami wżółstosłupniowemi trzy tylko częstokroć terminy mające, z których iwszy do 4tego lub 6tego, a czasem i wyższego jeszcze stopnia wyniesiony bywa; którego wykładnik z wykładnikami innych terminów bywa w proporcji Arytmetycznej, jak  $4:2$ , albo  $6:3$ . Weyrzawizy na takie pomiary, zdadzą się być 4to-słupniowemi, lub sześciostłupniowemi, w rzeczy saméy nie są tylko czworogrannemi, nazywają się zaś pomiarami naciąganiem 2go stopnia, *equationes derivata 2di gradûs*, i bardzo łatwo zamieniają się w czworogrannę, założywszy w czwartostłupniowym rzeczonym pomierze  $z$  za  $x^2$ , a w sześciostłupniowym toż  $z$  za  $x^3$ . I tak w pomierze:  $x^4 - 8x^2 - 4 = 0$ , założywszy  $z$  za  $x^2$ , będzie pomiar czworogranny:  $z^2 - 8z - 4 = 0$ ; w pomierze zaś:  $x^6 - 2ax^3 + 8b^3 = 0$  założywszy  $z$  za  $x^3$ , wypadnie także czworogranny pomiar:  $z^2 - 2az + 8b^3 = 0$ , których redukcya dalsza uczyni się przez następujący §. Obacz Rezolucyą Zagadnienia 5tego między przykładami pomiarów sześciogrannych.

III. Trafiają się także pomiary składane z znakiem ściennym wyraźnego lub domniemanego-

manego wykładownika ściany swojej w sobie zawierającym. Znak ten jeśli w iednój tylko części pomiaru znajduje się, łatwo się zgubi, mając go w téj części, w której jest, a zęć część wynosząc do stopnia wyrażonego przez tenże

znak zmazany. Tak np: pomiar ten  $\sqrt{a + x} = 2b$ , mając  $\sqrt{}$ , i  $2b$  wynosząc do 2go stopnia, obróci się w prostszy i będzie:  $a + x = 4b^2$ .

Tak i  $\sqrt[3]{a + x} = 2b$  będzie:  $a + x = 8b^3$ . i t. d. Znak bowiem ścienny pokazuje: że z ilkości pod nim położonej ma się wyciągnąć ściana przez wykładownika jego wyrażona, więc ilkość ta w rzeczy samej powinna być wyższostopniowa to jest: czworogranna lub sześciogranna; więc zostawiwszy ją bez znaku, nie przestanie być tymże samym stopniem, a zatem wyniosłszy zęć ilkość ięć równą do iednego z nią stopnia, równość się między nimi nie psuje, atymczasem składany pomiar obróci się w prostszy.

IV. Kiedy z warunków zagadnienia iakiego wypadnie kilka pomiarów składanych, zredukować je można do iednego przez założenie ceny ilkości niewiadomej w iednym pomierze wziętej za tęż samą ilkość położoną w 2gim, lub przez składanie w ieden pomiar cen obydwóch. W czym żadnej trudności dla tych nie ma, którzy mają w pamięci to, co się o redukcji podobnych pomiarów prostych przełożyło w Części Iwszej na karcie 121 i następu-

stępujących. Obacz Zagadnienia 2. i 4. niżej między przykładami pomiarów sześciogran-nych.

V. Wszelki pomiar składany, który tylko można zredukować czyli na prostszy obrócić, albo jest podzielny bez reszty przez inny jaki, który dzielnikiem albo miarą jego nazwać się może, albo nie jest tak podzielny. Je li nie jest, trzeba przystąpić do szczególnych sposobów redukowania go, które w następujących Rozdziałach będą wyśłużczone. Zastanowić się ie-  
dnak wprzód i roztrząsnąć dobrze należy: czy nie jest tak, jak się rzekło, podzielny, uważając naybardziéy wykładnika ściany, któ-ry wyraża: z ilu pomiarów prostych przez sie-  
bie rozmnożonych tenże składany pomiar wy-  
padł, przez które mógł ybyć podzielony. Tak  
np: pomiar 3ciostopniowy, którego wykładnik  
3, nie może wypaść tylko z rozmnożenia albo  
3 pomiarów prostych przez siebie samych, albo  
dwóch jednego prostego, 2go czworogranne-  
go, azatém przez te tylko może być podziel-  
ny, bo i wykładnik jego 3 nie może się dzielić  
tylko na 1, 1, 1, albo na 1 i 2; toz sam o n a się  
rozumieć i o 4tym stopniu; którego wykładnik  
4 jest podzielny I. na 1, 1, 1, 1, II. na 1, 1, 2,  
III. na 1, 3, IV. na 2, 2, i t. d. Szukając już  
dzielnika, od nayprostszego zaczynać natural-  
ny porządek każe, to jest: szukać naprzód po-  
miaru pierwszostopniowego, przez któryby po-  
dzielony mógł być bez reszty wyższostopniowy  
dany

dany, a znalazłszy taki i podział rzeczony uczyniwszy, szukać innego także pierwszostopniowego, przez któryby sam wieloraz z 1-wszego podziału wypadły mógł być podobnie podzielony *i t. d.* aż za wieloraz wypadnie pomiar wcale prosty. Jeżeli zaś dany pomiar wyższostopniowy albo wieloraz z podziału 1-wszego wypadły nie może się podzielić przez żaden pomiar prosty, natenczas uważać potrzeba: czy tenże pomiar lub wieloraz nie podzieli się przez pomiar iaki drugostopniowy, lub jeśli dany jeszcze wyższy jest, przez trzeciosstopniowy *i t. d.* nie siągając jednak póty wyższych, póki podział przez niższe nie będzie sprobowany. Wynalezienie takich dzielników co do pomiarów czworogrannych i sześciogrannych bardzo łatwe. Niech będzie np: pomiar:  $x^3 - 9x^2 + 22x - 8 = 0$ , szukam wszystkich dzielników ostatniego terminu — 8, będą: 1, 2, 4, 8; robię z nich pomiary proste I.  $x - 1 = 0$ , II.  $x - 2 = 0$ , III.  $x - 4 = 0$ , IV.  $x - 8 = 0$ . Dzielę dany pomiar przez 1-wszy, ale z tego podziału zostaje reszta, dzielę przez 2gi, ale i ten podział nie jest bez reszty; więc podzieliwszy przez 3ci, wypadnie za wieloraz pomiar od danego niższy to jest:  $x^2 - 5x + 2 = 0$  *i t. d.* lecz co się tyczy dzielników wyższostopniowych, tych wynalezienie nieco trudniejsze, o którym namieni się cokolwiek w Rozdziale ostatnim tej Części. Dokładniejszy tego wyfużczenie jest u X. Reynau. (\*)

G ROZ-

(\*) Analyse démontrée tom; 1. livr: IV. pag: 133.



## R O Z D Z I A Ł V.

*O Pomiarach czworogrannych.*

**N**Amieniło się w § XV. p. II. że pomiary składane mogą być tak, iako i proste albo określone, albo nieokreślone. O pomiarach składanych nieokreślonych nie masz tu co mówić, chyba to jedno: że ilkość nieokreślona w redukcjach rzeczonych pomiarów tak powinna być uważana, iak gdyby była określona, a po ostatniemy pomiaru redukcji ma się określić czyli na liczbę zgodną z warunkami zagadnienia obrócić, iako się ostrzegło w Rozdziale IV. Części I.

Około określonych więc pomiarów i zagadnień, zacząwszy od czworogrannych, cała nasza w tym i następujących Rozdziałach będzie zabawa.

§ XVIII. *Przepisy na rezolwowanie Problematów czworogrannych.*

Prócz powszechnych Przepisów danych tak w iwszemy Części Rozdziale zgim na rezolwowanie Problematów prostych, iako i w téy zgicy w § poprzedzającym, trzeba nadto mieć przed oczyma i zachować następujące:

*Przepis 1.* Przez wzmiankowane Przepisy tak trzeba zredukować pomiar czworogranny, żeby w iedney jego części albo czworogran tylko ilkości niewiadomey przez żadną inną

inną ilkość lub liczbę ani rozmnożony ani podzielony został, albo jeżeli zostaną inne jeszcze terminy, żeby zawierały w sobie ilkość niewiadomą też samą, która jest w terminie 1wszym, a'e prostą czyli do 2go stopnia nie wyniesioną, w 2gię zaś pomiaru części żeby się same wiadome ilkości bez przymieszki niewiadomych mieściły. Przeto gdyby z warunków iakiego zagadnienia wypadło kilka pomiarów dla kilku niewiadomych ilkości, wtyłkie te pomiary zredukować potrzeba do iednego (przez § XVII. p. IV.) w którymby iedna tylko niewiadoma została. Redukcyą zaś dalszą na tém ma stanąć, żeby czworogran ilkości niewiadomę z redukcji wypadły i w iednéjże części pomiaru umieszczony był dodatny równie iako i czworogran ilkości wiadomę w 2gię części; gdyż żaden czworogran nie może być odciążny przez p. V. § XV.

*Przepis 2.* Mając tak zredukowany pomiar, jeżeli w iednéj jego części nic więcej nie znajduje się prócz czworogranu ilkości niewiadomę, czyli jeżeli pomiar jest czysty; ślawa będzie dalszą jego redukcya. Niczego bowiem nie braknie, tylko ścianę czworogranną wyciągnąć, która z 1wszj naprzód części rzeczywiście wyciąga się przez § V, w 2gię zaś części, gdzie same są ilkości wiadome, wyciąganie ściany tymczasem wyrazi się zwycaaynym znakiem ściennym.

*Przepis 3.* Kiedy zaś w iednéjże części pomiaru czworogran ilkości niewiadomę ma

G2. przy-

przyłączone inne terminy zamykające w sobie też samą ale prostą czyli pierwsiotopniową ilkość, czyli kiedy pomiar jest przymierzkowy (§ XV. Wykł: III) wtenczas pomiar bywa niezupełny mający wprowadzić czworogran 1włzego terminu ściennego i dwóykę tegoż terminu rozmnożoną przez termin 2gi, ale nie mający czworogranu terminu 2go ściany swoi-  
 iéy, azatem wtenczas czworogran ilkości niewiadoméy bierze się za termin 1włzy pomiaru, inne zaś przyłączone terminy zawierające w sobie ilkość też samą niewiadomą ale prostą biorą się za 2gi termin, a 3ciego szukać trzeba, np: wpomierze  $x^2 - 3ax - ax = 2b - 4a^2$  za 1włzy termin bierze się  $x^2$ , za 2gi zaś  $-3ax - ax$ , czyli  $-4ax$ , a trzeciego tu brakuje to jest: czworogranu terminu 2go ściennego. Przeto poszukać go potrzeba, i dopełnić nim takiego pomiaru, żeby można było wyciągnąć z niego ścianę czworogranną. Nim zaś to dopełnienie nastąpi, potrzeba *na-przód*: wyciągnąć ścianę z terminu 1włzego, iaki jest w danym przykładzie  $x^2$ , którego ściana  $x$  będzie 1włzym terminem ściany dwukrótnéy, *potóre*: przez dwóykę tegoż terminu to jest przez  $2x$  podzielić 2gi danego czworogranu termin to jest  $-4ax$ , wieloraz ztąd wypadły  $-2a$  będzie 2gim terminem ściennym, którego czworogran  $4a^2$ , i całą ścianę wyciągnioną  $x - 2a$  zanotować.

*Przepis 4.* Uważać trzeba ieżeli czworogran,

gran, którego brakuje, terminu 2go nie znajduje się w zgięty pomiaru części z samych wiadomych ilkości złożony. Jeżeli nie, postąpić należy podług Przepisu 5. niżej położonego. Jeżeli zaś znajduje się, uważać: z jakim tam jest znakiem, odciążnym, czy dodatnym. I. Jeżeli tam jest z znakiem odciążnym, przenieść go ztamtąd potrzeba z przeciwnym znakiem do téj części, która ma w sobie ilkości niewiadome, a tym sposobem pomiar będzie dopełniony, i w 1włzędzy części swojej mieć będzie doskonały czworogran, którego ściana dwukrotna przez Przepis 3ci już jest wyciągniona. Albowiem prócz czworogranu terminu 1włzłego téj ściany i dwóyki terminu 1włzłego rozmnożony przez termin 2gi będzie nadto w téjże części pomiaru czworogran 2go terminu ściennego. Czego do zupełności pomiaru trzeba było. Tak w przykładzie wyżej danym czyli w pomierze:  $x^2 - 4ax = 2b - 4a^2$ , którego ściana  $= x - 2a$ , czworogran 2go téjże ściany terminu  $4a^2$  znajduje się z znakiem odciążnym w zgięty części, ten więc sam przeniesiony z przeciwnym znakiem do 1włzędzy dopełni pomiaru i będzie:  $x^2 - 4ax + 4a^2 = 2b$ . Zawierać bowiem będzie w 1włzędzy części swojej czworogran 1włzłego terminu ściennego  $x^2$  i dwójkę tegoż terminu rozmnożoną przez 2gi  $- 4ax$  z czworogranem 2go terminu  $+ 4a^2$ , które to części razem wzięte składają zupełny czworogran ściany dwukrotny przez §

X.

X. Wyciągnąwszy więc tę ścianę z 1wśzý dopełnionego pomiaru części przez § VI, a w 2giý wyciągnięcie znakiem tymczasem ściennym wyraziwszy, będzie pomiar:  $x — 2a = \sqrt{2b}$ ; przeniósłszy nakoniec —  $2a$  do części

2giý, będzie:  $x = \sqrt{2b} + 2a$  pomiar zredukowany do iednéy ilkości niewiadomý, iako iest oczywišta, z którego 2giý części obróconý na liczbę wyciągnąwszy także ścianę czworograną przez § XI. Zagadnienie będzie ufałtowane. II. Jeżeli zaś czworogran 2go terminu ściennego znajduje się w 2giý pomiaru części z znakiem dodatnym, nie można go żadną miarą przenosić do 1wśzý części, i brać za 3ci termin czworogranu mającego ścianę dwukrotną z przyczyny namienioný w § XV, p. V. gdyż taki czworogran iest fałszywy i niepodobny z natury samego mnożenia, z którego bierze swój początek, trzeba więc w tym razie nowozrobionym 2go terminu ściennego czworogranem dopełnić danego pomiaru podług Przepisu następującego.

*Przepis 5.* Jeżeli czworogran terminu 2go ściany dwukrotný nie znajduje się z odciażnym znakiem w 2giý pomiaru części z samych wiadomych ilkości złożoný, trzeba go zrobić i do obydwóch części przydać, którym przydatkiem równość między niemi bynajmniéy się nie zepsuje, gdyż się też sama ilkość do równych przyda. Robi się zaś czworogran rze-

czo-



czony z połowy współczynnika terminu 2go il-  
kości niewiadoméy, czego przyczyna jest w sa-  
mym składzie każdego czworogranu, którą ka-  
żdy łatwo postrzeże. Dajmy np: pomiar czwo-  
rogranny z Zagadnienia iakiego warunków wy-  
padły:  $x^2 + 2ax = b$ . Biorąc przez Przep: 3ci  
za termin 1wszy  $x^2$ , za 2gi zaś  $+ 2ax$ , i wycią-  
gając ścianę z  $x^2$ , będzie 1wszym terminem  $x$ ,  
przez którego dwóykę to jest przez  $2x$  gdy  
się podzieli termin 2gi  $+ 2ax$ , wieloraz  $+ a$   
będzie 2gim terminem ściennym, azatém cała  
ściana  $= x + a$ ; ale że czworogranu tegoż 2go  
terminu ściennego nie masz w 2giéy części,  
trzeba go więc zrobić z połowy współczynni-  
ka terminu 2go  $+ 2ax$ , będzie taką połową:  
 $\frac{2a}{2} = a$ , czworogran zaś z niéy będzie:  $ax + a^2$   
 $= a^2$ , który przydawszy do obydwóch pomia-  
ru części, będzie:  $x^2 + 2ax + a^2 = b + a^2$   
pomiar zupełny czyli zawierający w pier-  
wizéy części swéy doskonały czworogran ścia-  
ny dwukrotnéy  $x + a$ , która przez Przepis 4-  
już wyciągniona, azatém pomiar zamieni się  
w ten:  $x + a = \sqrt{b + a^2}$ ; przeniósłszy zaś  $+ a$   
do 2giéy części, będzie:  $x = \sqrt{b + a^2} - a$  i t.d.

*Przepis 6ty i ostatni* na rezolwowanie za-  
gadnień nie tylko czworogrannych lecz i wszel-  
kich innych składanych jest tenże sam, który  
w 1wszéy części Rozdz: 2gim dany jest na re-  
zolwowanie Problematów prostych, to jest:  
ażeby zredukowawszy podług danych Przepi-  
sów

sów pomiar do iednéy ilkości niewiadoméy, obrócić litery w zgiéy iego części umieszczone wyrażające ilkości wiadome na liczby, za które na początku działania były założone, a z liczb podług Przepisów § XI. ścianę wyciągnąć, ta będzie ostatnią rezolucyą danego zagadnienia; wreszcie doświadczyć téy rezolucyi przez roztrząśnienie: czy się stało zadość warunkom zagadnienia, np: w ostatnim pomie-

rze:  $x = \sqrt{b + a^2} - a$ , jeżeli a założone za 5, b za 24, obróciwszy litery na liczby i dodawszy pod znakiem ściennym położone, będzie  $x =$

$\sqrt{24 + 25} - 5 = \sqrt{49} - 5$ ; nakóńiec wyciągnąwszy ścianę czworograną z liczby 49, będzie:  $x = 7 - 5 = 2$ . Gd. by zaś z ilkości niewiadomych na liczby obróconych wyciągnąwszy ścianę reszta iaka została; znakby był: iż liczba owa nie jest doskonale czworograną, azatém podług Przestrogi iwszég § XI. wyciągać, jeżeli się podoba, można też ścianę przez terminy niekończące czyli przez przybliżanie *i t. d.*

**Prześiropa 1.** Zeby zaczynający nie mieli trudności w rozeznawaniu Pomiarów czworogrannych zupełnych od niedopełnionych, niech uważają: 1. jeżeli w iwszym terminie danego pomiaru jest czworogran ilkości niewiadoméy, w 2gim zaś: czy jest iwszy stopień téżże ilkości rozmnożony przez współczynnika liczbą lub literą wyrażonego lub domniemanego, a w 3cim

CZWO-

czworogran z połowy tegoż współczynnika zrobiony ; wtenczas pomiar w części , w którę są rzeczony terminy ; będzie zupełny ; iaki jest ten :  $x^2 + 2ax + a^2 = b$  , w którym oprócz  $x^2$  w 1wszym terminie , jest jeszcze w 2gim  $x$  z współczynnikiem  $2a$  , w 3cim zaś  $a^2$  czworogran z połowy tegoż współczynnika to jest z  $\frac{2a}{2}$  czyli z  $a$  . II. Jeżeli zaś nie masz w pomiarze 3go terminu , albo choć jest , jeżeli nie jest czworogranem zrobionym z połowy współczynnika terminu 2go , pomiar taki jest niezupełny i potrzebuje dopełnienia , o którym się mówiło , taki jest :  $x^2 + 2ax = b$  , taki i ten :  $x^2 + 2ax + 3a = b$  ; w 1wszym bowiem brakuje wcale 3go terminu , w 2gim choć jest ten termin , ale nie jest czworogranem , iakiego tu trzeba , azatém obydwóch dopełnić należy . Brak ten , żeby się prędzcy dał poznać , wszystkie pomiaru terminy przenoszą się do jedneyże części i równają się z 0 , tak  $x^2 + 2ax - b = 0$  i t. d.

*Przeestroga 2.* Uważać pilnie potrzeba : że po ostaniey redukcji pomiarów czworogranych , azatém po wyciągnienu już nawet z nich ściany , cena ilkości niewiadomey w części drugiey umieszczona równie być może z znakiem  $+$  lub  $-$  . I tak zredukowawszy pomiar :  $y^2 - 2by - b^2 = a^2$  , i ścianę z niego wyciągnawszy , może być albo  $y - b = + a$  albo  $y - b = - a$  , gdyż czworogran , z którego ściana  $a$  wyciągniona , dodatny być powinien

nien, czy się robi z  $\ast a \times \ast a$ , czy z  $a \times a$  podług przepisów mnożenia, więc ściana z  $\ast a^2$  wyciągniona równie może być dodatna iak odciążna, więc 2ga część zredukowanego pomiaru może być  $\ast a$ . Jeżeli weźmie się za dodatną, przeniosłszy z 1wszhey do 2gihey części — b, będzie:  $y = b \ast a$ , ieżli za odciążną, będzie  $y = b - a$ . Te zaś dwie ceny iednéyże ilkości y, są bardzo odmienne i sobie przeciwne. Jakże tedy poznać, że  $y = b \ast a$ , a iak, że  $y = b - a$ ? Poznanie tego nie naytrudniejszy. Przyysć do niego można przez uważne warunków zagadnienia roztrząsanie. Będzieli ilkość y od b większa, pomiar:  $y - b = a$  zamykać w sobie będzie ścianę dodatną, będzieli mnieysza, ściana iego będzie odciążna, np: ieżli  $y = 36$ ,  $b = 27$ ,  $a = 9$ , będzie  $y - b = a = 36 - 27 = 9$ , czyli  $9 = 9$ . Przeciwnie gdyby było  $y = 27$ ,  $b = 36$ ,  $a = 9$ , byłoby  $y - b = -a = 27 - 36 = -9$ , czyli  $-9 = -9$ ; czyli w 1wszym przypadku ściana  $= 9$  byłaby dodatna dlatego: że y od b większe, w 2gim odciążna, że y od b mnieysze, o czém dobrze pomnieć należy.

### PRZYKŁADY POMIAROW CZWOROGRANNYCH.

*Zagadnienie 1nsze.* Pewna liczba Rzemieślników z czeladzią swą stanęła do roboty, każdy z Maystrów po tyle miał czeladzi, ile samych

famych Maystrów razem wszystkich wziętych było ; była zaś liczba wszystkiéy czeladzi = 625, pytam: iaka liczba Maystrów ?

*Rezolucya.* Niech będzie  $625 = a$ , liczba niewiadoma maystrów  $= x$  ; zważając pilnie warunki zagadnienia, oczywiście się pokazuje : że liczba niewiadoma maystrów równa się z liczbą czeladzi , gdy tamta wyniesiona będzie do 2go stopnia , gdyż wynosząc do tego stopnia, czyli mnożąc ją przez nią samą, wyjdzie tyle maystrów , ile każdy z nich miał czeladzi. Wynosząc więc  $x$  do 2go stopnia, będzie  $x \times x = x^2$ , a podług warunków zagadnienia będzie pomiar czworogranny :  $x^2 = a$ , który (ponieważ jest czyłty przez § XV ) redukując , dosyć będzie ścianę czworograną przez Przepis 2. wyciągnąć z 1wszéy jego części, po którém wyciągnięciu zostanie  $x = \sqrt{a}$ , czyli przez Przepis 6.  $x = \sqrt{625}$ , albo wyciągając też samą ścianę z 2giéy części przez § XI. będzie  $x = 25$ . Było tedy maystrów 25. Albowiem  $25 \times 25 = 625$ . C. B. D. R.

*Zagadnienie 2gie.* Zwieziono posadzki kamiennéy lub marmurowéy czworogrannéy sztuk 576, która ma być dana w sali lub w inném miejscu także czworogranném ; pyta więc, który ma ją dawać , po wiele sztuk wszérz i wzdłuż ma układać : żeby wszystka owa posadzka wyszła , czyli żeby nic z niéy nie zbywało , ani do niéy nie brakowało w układaniu do jednéyże miary rzędów ?

*Re-*



*Rezolucya.* Sztuki wzdłuż i wśzérz mające się układać niech będą  $= x$ , którego czworogran  $= x^2$ . Ponieważ zaś i mieysce samo także ma być czworogrannę, więc pomiar będzie:  $x^2 = 576$ , czyli wyciągając z obydwóch części ścianę czworogranną, przez § V. i XI, będzie:  $x = 24$ . Albowiem  $24 \times 24$ , czyli wzdłuż i wśzérz układając po 24 sztuk rzeczony posadzki, będzie  $= 576$ . C.B.D.R.

*Zagadnienie 3cie.* Rotmistrz z Towarzystwem swém z placu potyczki powróciwszy zapytany, ile nieprzyjaciół ręką swoją na placu położył, ręką, rzecz, swoją i towarzyszków swoich legło 1296 głów nieprzyjacielskich; ta zaś rzecz godna uwagi: iż każdy z nas tyle zabił nieprzyjaciół, ile nas wszystkich razem było. Pytam, wielu towarzyszków z owym Rotmistrzem było i po wiele nieprzyjaciół każdy z nich na placu trupem położył?

*Rezolucya.* Niech będzie  $1296 = a$ , liczba towarzyszków  $= x$ ; ponieważ więc każdy z nich tyle nieprzyjaciół zabił, ile ich samych było, będzie liczba zabitych równa liczbie towarzyszków wyniesioney do 2go stopnia, czyli będzie  $= x^2$ , a stąd pomiar:  $x^2 = a$ , z którego wyciągnąwszy ścianę czworogranną przez Przepis 2, będzie:  $x = \sqrt{a}$ , czyli przez Przep: 6.  $x = \sqrt{1296} = 36$ . Było więc towarzyszków z Rotmistrzem 36, i każdy z nich położył nieprzyjaciół 36. Wszakże  $36 \times 36 = 1296$ . C. B. D. R.

*Zaga-*

*Zagadnienie 4te.* Piotr Kmiotek rzecze do Pawła Sąsiada łwego: Jam czwórma korcami mniéy pszenicy wysiał na zimę, niż ty; a przecię gdyby z każdego ode mnie wysianego korca tyle się urodziło, ileś ty wysiał, miałbym na przyszły rok pszenicy korcy 165. Pytam, ile korcy pszenicy wysiał Piotr, a ile Paweł?

*Rezolucya:* Korcy 165 = a, korce zaś od Pawła wysiane = x, więc podług warunku korce od Piotra wysiane = x — 4, zaczęm gdyby korzec od Piotra, wysiany zarodził tyle, ile wysiał Paweł, Piotr miałby pszenicy korcy: x — 4 × x = x<sup>2</sup> — 4x, te zaś niewiadome korce Pawła rozmnożone przez korce Piotra także niewiadome wyrównałyby ogólnie korcom 165 czyli byłyby = a. Wypada tedy z warunków zagadnienia następujący pomiar: x<sup>2</sup> — 4x = a. Co się redukcji tego pomiaru tycze, oczywista rzecz: że ten pomiar w 1wszey części swojej jest niezupełny (§ XVIII. Przestr. 1.) gdzie 1wszym terminem jest x<sup>2</sup>, 2gim — 4x, a 3go brakuje. Dopełniając więc, czyli przez Przepis 5. z połowy współczynnika 2go terminu to jest z  $\frac{4}{2}$  czyli z 2 robiąc czworokąt = 4 i do obydwóch części dodając, będzie: x<sup>2</sup> — 4x + 4 = a + 4 pomiar zupełny, z którego ścianę czworokątną wyciągnąwszy przez § VI. będzie: x — 2 =  $\sqrt{a + 4}$ . Przeniółszy zaś — 2 do 2giéy części, będzie x =  $\sqrt{a + 4} + 2$ , czyli przez Przepis 6. ilkość a obróciwszy na liczbę, będzie:

będzie  $x = \sqrt{165 + 4} - 2$ , czyli  $x = \sqrt{169} - 2$ , wyciągnawszy zaś też ścianę z zgięty części, będzie przez § XI:  $x = 13 + 2 = 15$ . Paweł więc wysłał korcy 15, a zatem Piotr korcy  $15 - 4 = 11$ . Wszakże  $11 \times 15 = 165$ , więc gdyby Piotrowi każdy korzec tyle zarodził, ile wysłał Paweł; miałby Piotr korcy 165. C. B. D. R.

*Zagadnienie 5te.* Dway Kawalerowie za powrotem od gry tak z sobą rozprawiają: pierwszy do drugiego mówi: ty widzę, Przyjacielu, czterema Czerwonemi Złotemi więcéy wygrał ode mnie; gdyby, odpowiedź drugi, summy wygranych od nas Czerw. Złł: zamieniły się w czworograny, czworograny te obydwa razem wzięte nie uczyniłyby tylko 400 Cz: Złł: Pytam, ile 1wszy, a ile 2gi czerwonych złotych wygrał?

*Rezolucya.*  $4 = a$ ,  $400 = b$ , czerwone Złł: od 1wszego wygrane  $= x$ , którego czworogran  $= x^2$ , od 2go wygrane  $= x + 4$ , czyli  $x + a$ , którego czworogran przez § III  $= x^2 + 2ax + a^2$ . Będzie zatem, dodawszy te dwa czworograny podług warunków zagadn: pomiar:  $2x^2 + 2ax + a^2 = b$ . Czyniąc tego pomiaru redukcją, naprzód przez Przepis 1. przenoszę  $a^2$  do zgięty części i cały pomiar dzielę przez 2, będzie:

$$x^2 + ax = \frac{b - aa}{2},$$

gdzie

gdzie widzę: iż iwsza część niezupełnym jest  
czworogranem. Dopełniam iéy więc czworo-  
ranem  $\frac{aa}{4}$  zrobionym z połowy współczyn-  
nika zgo terminu  $ax$  czyli z  $\frac{aa}{2}$ , przydając

go obydwom częściom, będzie:  $x^2 + ax + \frac{aa}{4}$   
 $= \left( x + \frac{a}{2} \right)^2$ ; dopiero wyciągam z i-  
wszéy części ścianę czworograną przez § VI,

będzie:  $x + \frac{a}{2} = \sqrt{x^2 + ax + \frac{aa}{4}}$  czyli prze-  
niósłszy wiadomą ilkość do wiadomych i  
obróciwszy litery na liczby, będzie:  $x =$

$$\sqrt{\frac{400 - 16}{2} + \frac{16}{4}} - 2, \text{ czyli zredukowawszy: } x =$$

$\sqrt{196} - 2$ , nakoniec przez Przepis 6.: ścianę  
wyciągnawszy:  $x = 14 - 2 = 12$ . Piérwszy  
więc z owych Kawalerów wygrał Cz: Zł: 12,  
a 2gi 12 + 4 = 16. Wszakże  $12 \times 12 = 144$ ,  
a  $16 \times 16 = 256$ , 144 zaś + 256 = 400.  
C. B. D. R.

*Zagadnienie 6te.* Kozacy Moskiewscy  
Dworek Szlachecki najechawszy, wydarli Szla-  
chcicowi Zł: Pol: 3,333; z podziału równego  
tych pieniędzy przypadło na każdego we-  
troje tyle, ile wszystkich tych było najezdni-  
ków i nadto po Zł: 2. Pytam, ile było Ko-  
zaków i po siła na każdego przypadło?

Re-

*Rezolucya.* Liczba niewiadoma Kozaków  $x$ , więc na każdego przypadło z podziału rabunku  $3x + 2$ , co rozmnożywszy przez  $x$  czyli przez liczbę kozaków zapytaną, będzie produkt:  $3x^2 + 2x$ , azatém wypadnie pomiar:  $3x^2 + 2x = 3333$ , który redukując, to jest naprzód: dzieląc przez 3 wszystkie terminy, będzie:  $x^2 + \frac{2}{3}x = 1111$ , potem dopełniając czworogranu przez Przep: 3, czyli biorąc współczynnika terminu 2go i z połowy jego robiąc czworogran, to jest  $\frac{2}{3}$  dzieląc przez 2, a wieloraz  $\frac{2}{3}$  wynosząc do 2go stopnia, będzie przez § II. p. IV. czworogran  $\frac{4}{9}$ , który dodawszy do obydwóch części, będzie dopełniony pomiar:  $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} = 1111 + \frac{4}{9}$ . Obracając zaś liczbę całkowitą do przyległej frakcyi podług reguł Arytmetycznych, to jest przez 36 mnożąc całkowitą, a do produktu przydając 4, będzie:  $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{40000}{36}$ . Z tego już pomiaru naprzód z części 1włzey wyciągając ścianę czworogranną przez § VI. będzie  $x + \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{40000}{36}}$ . Wyciągając zaś i z 2gięj części też ścianę przez § XI. będzie:  $x + \frac{2}{3} = \frac{200}{6}$ ; nakoniec przenosząc  $+\frac{2}{3}$ , będzie:  $x = \frac{200}{6} - \frac{2}{3} = \frac{198}{6} = 33$ .

Było więc Kozaków 33, każdy zaś biorąc we troje tyle, ile wszystkich było, i nadto 24: 2, wziął  $33 \times 3 = 99 + 2 = 101$ . Jakoż  $101 \times 33 = 3333$ . C. B. D. R.

*Zagadnienie 7me.* Kawalerowie z Dami w pewnym posiedzeniu umowili się o taką  
1kła-



składkę pieniężną na wsparcie Szpitala Dzieciątka Jezus : żeby każdy z przytomnych Kawalerów dał przez połowę tyle Czer: Zł: ile wszystkich razem było Kawalerów i nadto jeszcze Cz: Zł: 3. Damy zaś żeby 3cią część téj kwoty złożyły , którą każdy w szczególności Kawaler ofiarował. Było zaś Dam trzy razy więcej niż Kawalerów , a składka cała wyniosła na Cz: Zł: 720. Pytam , ile wszystkich było Kawalerów , a ile Dam , tudzież po siła na Osobę każdą przypadło dać do powszechnéj składki ?

*Rezolucya.* Niech będzie liczba Kawalerów  $= x$  , toć Dam  $= 3x$  , składka Kawalerów  $= \frac{x}{2} \star 3$  . Składka zaś Dam , ponieważ 3cią częścią tylko ma być składki Kawalerskiey , przez 3 dzieląc  $\frac{x}{2} \star 3$  , będzie  $= \frac{x}{6} \star 1$  . Mnożąc już składkę Kawalerów to jest :  $\frac{x}{2} \star 3$  przez ich liczbę niewiadomą czyli przez  $x$  , będzie  $\frac{xx}{2} \star 3x$  , podobnie i składkę Dam  $\frac{x}{6} \star 1$  mnożąc przez ich liczbę czyli przez  $3x$  podług warunku , gdyż Dam wetroje więcej było , niż Kawalerów , będzie  $\frac{3xx}{6} \star 3x$  ; aże składki te obydwie czynią Czerw: Zł: 720 , wypada pomiar:

$$\frac{xx}{2} \star 3x \star \frac{3xx}{6} \star 3x = 720.$$

$$\text{Czyli: } \frac{xx}{2} \star 6x \star \frac{xx}{2} = 720.$$

$$\text{Czyli: } x^2 \star 12x \star x^2 = 1440.$$

$$\text{Czyli: } 2x^2 \star 12x = 1440.$$

Nakoniec:  $x^2 \star 6x = 720$  pomiar niezupelny. Dopełniając go więc przez Przepis 5. to jest z połowy 2go terminu to jest : z 3 uczyniony

H

CZWO-

czworogran 9 dodając do obydwóch części ,  
 będzie :  $x^2 + 6x + 9 = 720 + 9$ . Nareszcie  
 przez § VI. i XI. wyciągając ścianę czworo-  
 granną z obydwóch części , będzie :  $x + 3 =$   
 $27$  , czyli  $x = 27 - 3 = 24$ . Było więc Ka-  
 walerow 24, Dam zaś wetroje tyle , więc  $24 \times 3$   
 $= 72$ . Dał zaś każdy Kawaler przez połowę  
 tyle , ile ich wżysłkich było i nadto 3 , więc  
 dał  $\frac{24}{2} = 12 + 3 = 15$  , azatém wżysłcy Ka-  
 walerowie złożyli  $15 \times 24$  sumnę Cz: Zł:  $=$   
 $360$  : toć Damy dając 3cią część tego , co  
 każdy dał Kawaler , czyli 3cią część 15 , to iest  
 po 5 Cz: Zł, złożyły sumnę Cz: Zł:  $72 \times 5 =$   
 $360$ . Lecz  $360 + 360 = 720$  Cz: Zł. C.B.D.R.

*Zagadnienie 8me.* Kupiec zaprzestając  
 handlu , ciekawością nabawia swych Kollegów:  
 iakiby był iego majątek. O co od jednego z  
 nich zapytany taką daje odpowiedź: gdyby sum-  
 ma pieniężna wyrównywająca memu majątko-  
 wi pięćdziesiąt razy była odciagniona od czwo-  
 rogranu téżże summy ; miałbym 399 millio-  
 nów Złot: Pytam: czy ów Kupiec takim iest bo-  
 gaczem , iakim się być zdaje ?

*Rezolucya.* Summa majątkowi Kupca wy-  
 równywająca niech będzie  $= x$  , millionów  
 $399 = a$  ,  $50 = b$ . Wypada z warunków za-  
 gadnienia niezupełny (przez § XVIII. Przestr:  
 1.) pomiar :  $x^2 - bx = a$  ; którego dopeł-  
 niając przez Przep: 5 , czyli biorąc połowę  
 współczynnika terminu 2go i wynosząc do 2go  
 stopnia , a ten przydając do obydwóch części  
 pomia-

pomiaru, będzie:  $x^2 - bx + \frac{bb}{4} = a + \frac{bb}{4}$ .

Wyciągając zaś ścianę czworokrotną z -  
wśey pomiaru części, będzie:  $x - \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{a}$   
 $+ \frac{bb}{4}$  przez § XVIII. Przestr: 2. Przenosząc -  
 $\frac{b}{2}$  do zgięty części i litery na liczby obracając,  
będzie:  $x = \frac{50}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{399,000,000}$ ;  $+ \frac{2500}{4}$ , (-  
bróciwszy zaś frakcyą na całkowitą i 625 przy-  
dawşy do poprzedzającę, będzie z summy  
tę ściana czworokrotna wyciągniona albo  
 $+ 19975$ , albo - 199775 przez Przestrógę 2 §  
wzmiankowanego; azatém 1wszy termin  $\frac{50}{2}$   
czyli 25 albo przydany do ściany  $+ 19975$   
pokaże: iż kupie ów porzucający powoła-  
nie swoje ma Zł: 20,000, albo też od ścia-  
ny - 19975 odciągniony, wyjawi: iż tenże  
kupiec winien rzetelnego dęgu Zł: 19,950,  
a tak bardzo wątpliwy jest stan majątku tegoż  
Kupca. Zważywszy atoli, co się rzekło pod  
§ XVIII. Przestr: 2, że w przedostatnim pomie-  
rze:  $x - \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{a + \frac{bb}{4}}$  ilkość  $x$  większa jest  
niż  $\frac{b}{2}$ , bo ilkość  $\frac{b}{2}$  jest  $= \frac{50}{2}$  czyli  $= 25$ ,  
a ilkość  $x$  wyraża sumę, która od czworo-  
granu z nię samęy uczynionego odciągnio-  
na podług warunku zagadnienia dać powinna  
resztę  $= 399$  Millionów, wnieść można: że  
wyciągniona z liczby pod znakiem ściennym  
położonę ściana 19975 jest dodatna, azatém  
przydana do  $\frac{b}{2}$  czyli do 25 wyraża rzetelny  
Kupca majątek nie millionowy wprawdzie,  
iak się mogło komu zdawać, ale tysiączny  $=$   
20,000. Jakoż roztrząsając warunki Zagadnie-

nia, Rezolucya ta okaże się do prawdy podobniejsza. Biorąc bowiem 50 razy 20,000, to jest mnożąc tę summę przez 50, a produkt  $= 1,000,000$  odciągając od czworogranu téż summy to jest od liczby 400,000,000; zostanie reszta, iaka w Zagadnieniu była warowana to jest: 399 millionów. Przeciwnie gdyby wynaleziona ściana 19,975 za odciażną była wzięta i od niéy 25 odciągnięte były, reszta 19950 nie uczyniłaby zadość warunkom Zagadnienia, gdyż summa 19950 wzięta 50 razy i od czworogranu swego odciągnięta nie dałaby reszty w Zagadnieniu warowaney  $= 399$  millionów. C. B. D. R.

*Zagadnienie 9te.* Pewny z Kapitałistów daje na handel 10,000 Czer: Zł: Kupcowi, umówiwszy się z nim o roczny procent; ale kupiec w rok zaraz po wzięciu téy summy bankrutować zaczyna; prosi atoli: ażeby mu wierzyciel do 2go roku czekał pożyczonéy summy wraz z procentem. Po upłynionych dwóch latach gdy się byt kupca nie polepsza, a Kredytorowie przyciskają go o wypłacenie długów, podaje cały majątek swój ruchomy i nieruchomy na prawny między tychże kredytorów podział, czyli, iak mówią, *in potioritate*. Po prawném rozśądzeniu żaden z Kredytorów należności swoiéy nie odbiera bez defalki, a w szczególności wzmiankowany Kapitałista straciwszy dwuletnią prowizyą, na samym nawet Kapitale znacznie uszkodzony zostaje

zostaje, nie odzyskując z 10,000 Czer: Złot: tylko 8,100. Pyta więc po siła na ftu traci?

*Rezolucya.* Ponieważ 8,100 odzyskał, więc na Kapitale 10,000 stracił ogólnie 1,900 Cz: Zł:, gdyż  $10,000 - 1900 = 8,100$ . Jle zaś w szczególności na każdym ftu stracił, szukać trzeba przez Regułę proporcyi, założywszy —  $x$  za niewiadomą stratę, będzie: 100. —  $x : : 10,000$ . (mnożąc 3ci termin przez 2gi, a produkt dzieląc przez 1wszy) strata po roku  $= 100x$ ; po 2gim zaś, podobnie działając, a przepisy na znaki w mnożeniu i dzieleniu zachowując, będzie: 100. —  $x : : 10,000 - 100x$ . strata  $= 100x + x^2$ . Zebrawszy już te dwie straty w iedną sumę, i z ogólną stratą zrównawszy, wypadnie pomiar czworogranny:  $200x + x^2 = 1,900$ . Czyli:  $x^2 - 200x = -1,900$ . Dopełniając zaś pomiaru, czyli dodając do obydwóch jego części czworogran zrobiony z połowy współczynnika 2giego terminu; będzie:  $x^2 - 200x + 10,000 = 1,900 + 10,000$ . Wyciągając ścianę z 1wszý pomiaru części przez § VI, będzie:  $x - 100 = \sqrt{-1,900 + 10,000}$ . Odciągając 1,900 od 10,000, będzie:  $x - 100 = \sqrt{8,100}$ . Wyciągając też ścianę z 2giéy części przez § XI, będzie przez Przestrożę 2. § XVIII:  $x - 100 = \pm 90$ , to iest:  $=$  albo  $\mp 90$ , albo też  $-90$ . Biorąc nakoniec wyciągnioną ścianę za odciażną z przyczyny w téyże Przestrodze wy-

śuszczo-



śluszczoney, i przenosząc wiadome do wiadomych, będzie:  $x = 100 - 90 = 10$ . Wszakże jeżeli kupiec ów w pierwszym roku stracił 10 na 100, toć na 10,000 stracił 1,000 (gdyż: 100. 10 :: 10,000. 1,000.) i nie zostało mu z kapitału na rok 2gi tylko 9,000, toć w roku 2gim 10 tracąc na 100, na 9,000 stracił 900 (gdyż 100. 10 :: 9,000. 900.) A że  $1000 - 900 = 1,900$  stracie ogólnej, więc po 10 na 100 stracił. C. B. D. R.

*Zagadnienie 10te.* Ociec umierający zostawił młodocianemu Sýnowi swemu intraty roczney Czer: Zł: 200. Naznaczony sierocie Opiekun i obowiązany: aby, ile możności, powiększał śzczupłą tę jego intratę. Jakoż Opiekun w 1wszym zaraz opieki swęy roku z odebraney wcześniej owęy intraty odłożywszy na potrzeby Młodzieńca Cz: Zł: 100, a resztę to jest 2gie 100 na prowizyę dawszy, znacznie powiększył przerzeczoną jego intratę; ale znacznie ją jeszcze powiększył na drugi rok, gdy z pierwszorocznęy téy całej intraty nie wydawszy tylko Cz: Zł: 130, oszczędził 70 i dał znowu na podobną prowizyę. Wiadomo zaś nie jest: na jaką prowizyę oszczędzone owe Czer: Zł: 100 na początku 1go roku były dane, to tylko po upłynionych dwu latach opieki pokazało się: iż z téy dwuletnięy prowizyi do intraty od Oycy zostawionęy przybyło Młodzieńcowi Czer: Zł:  $14 \frac{31}{3}$  (na Zagadnienia podobne bez frakcyi będzie Rezolucya

zolucya 2ga i 3cia ogólna) Pytam: na jaką prowizyą wzmiankowane Czer: Zł: 100 były oddane?

*Rezolucya 1.* Pieniądze od wydatku pierwszorocznego odcięte i na prowizyą dane to jest Czer: Zł: 100 = a, odcięte zaś od drugorocznego wydatku Czer: Zł: 70 = b, powiększenie intraty Czer: Zł: 14 +  $\frac{31}{25}$  = d, prowizya od 100 niewiadoma, podzieliwszy a =

II

100 przez x, będzie =  $\frac{100}{x}$ . \* Po roku więc

x

owa sierota mieć będzie intraty Cz: Zł: 200

a

\*  $\frac{100}{x}$ , a że z téj intraty na początku 2go ro-

x

ku

(\*) Prowizye od summ Kapitałnych różne są w różnych Krajach. W naszym późniejszym prawem ustanowiona prowizya świecka jest po 5 od sta, aże 5 jest zostą częścią sta, prowizya taka wyrazić się może tą frakcyą  $\frac{100}{25}$ , gdyż frakcyą tę obracając na liczbę całkowitą wypada wieloraz 5 to jest prowizya po 5 od 100, gdyż w 100 dwadzieścia razy zawiera się 5 to jest prowizya wzmiankowana. Podobnym sposobem wszelką inną prowizyą albo prawem, albo zwyczajem uchwaloną wyrazić można np: prowizyą po 4 od 100, ponieważ 4 w 100 mieści się 25 razy, wyrazi frakcyą  $\frac{100}{25}$  i t. d. iako się namieniło w Części I. w Przestrodzie pod Zagad: 1. o defalkach. Gdy więc prowizya będzie niewiadoma, iako jest w tém Zagadnieniu, założywszy za nią x, dobrze się wyrazi przez frakcyą  $\frac{100}{x}$ , albo założywszy za 100 literę a, przez

frakcyą literalną:  $\frac{100}{x}$ .

x

ku odcięte Czer: Zł: 70 i znowu na prowizyą są dane, przybędzie do intraty pierwszoroczney w 2gim roku summa Czer: Złol: 70

a

a

$\frac{a}{x}$  — czyli  $b \frac{a}{x}$  —, od któręych chcąc wynaleść

prowizyą, potrzeba  $b \frac{a}{x}$  przez  $x$  podzielić

tak, iak się pospolite frakcye dzielą, będzie tedy powiększenie drugoroczney intraty:

$\frac{1}{x} \frac{b}{a} \frac{a}{b} \frac{a}{a}$

$\frac{1}{x} \frac{b}{a} \frac{a}{b} \frac{a}{a}$  —, azatém po upłynio-

nym czasie dwuletnięy opieki ogólne teyże

intraty powiększenie będzie  $\frac{a}{x} \frac{b}{x} \frac{a}{x^2}$

Ze zaś to powiększenie według warunku zagadnienia jest  $\frac{1}{14} \frac{31}{12} = d$ , więc nastę-

pujący wypada pomiar:  $d = \frac{a}{x} \frac{b}{x} \frac{a}{x^2}$ ,

w którym gubiąc frakcye, czyli mnożąc przez  $x^2$  wszystkie inne terminy (iak się uczyło w

Części I. na kar: 66) będzie:  $dx^2 = \frac{a}{x} \frac{b}{x} \frac{a}{x^2}$

$\frac{a}{x} \frac{b}{x} \frac{a}{x^2}$  a. Obracając zaś frakcye na całkowite, to jest: przez mianownika  $x$  dzieląc liczników, będzie:  $dx^2 = ax \frac{b}{x} \frac{a}{x^2}$ . Przenosząc:  $dx^2 = ax - bx = a$ . Dzieląc przez  $d$ :

$x^2$

$$x^2 - \frac{ax - bx}{d} = \frac{a}{d}. \text{ Tak zredukowa-}$$

ny pomiar, odłączysz ilkość  $x$  od współ-  
czynników swych  $a$  i  $b$ , a rozmnożenie przez  
nią obydwóch terminów znakiem mnożenia  
wyraziwszy, zamieni się w następujący:  $x^2 -$

$$\frac{a-b}{d} \times x = \frac{a}{d}; \text{ gdzie dla ułatwienia dalsz\text{e}y}$$

redukcyi za  $\frac{a-b}{d}$  założywszy  $f$ , bę-

$$\text{dzie nowy pomiar czworogr: } x^2 - fx = \frac{a}{d};$$

w którym, ponieważ część iwsza jest niezu-  
pełna przez § XVIII. Przestr: 1, dopełniając  
ię, przydać trzeba do obydwóch pomiaru czę-  
ści czworogran zrobiony z połowy współczyn-  
nika zgo terminu; ; tym sposobem pomiar do-  
pełniony będzie:  $x^2 - fx + \frac{f^2}{4} = \frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}$

$$\text{z którego iwsz\text{e}y części wyciągn\text{a}w\text{y} ściąg$$

czworogran\text{a} przez § VI, a w\text{a}gię wyrazi-  
wszy to\text{z} wyciągnięcie znakiem ściennym, bę-  
dzie  $x - \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}}$  czyli:  $x = \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{a}{d} + \frac{f^2}{4}}$

$$\text{Naostatek obróciwszy litery}$$

na liczby w zgięty pomiaru części, a z liczb wyciągnąwszy ścianę czworokrotną przez § XI. wypadnie:  $x = 12$  to jest: zapytana prowi-  
 zya. Ale że zaczynający mogliby mieć tru-  
 dność w tém obracaniu liter na liczby ró-  
 wnie iak w wyciąganiu z liczb ściany czworo-  
 rogrannéy; więc dla ułatwienia téy roboty,  
 tudzież dla dania do innych podobnych praw-  
 dła, całe to działanie wyłuszczyć naydokła-  
 dniey należy. *Naprzód*: założone były litery  
 za liczby a za 100, b za 70, d za powię-  
 kszenie intraty czyli za  $14 \frac{31}{36}$ . Cz: Zł:, to  
 jest: za  $\frac{535}{36}$ , nakoniec dla łatwieyszy pomia-

ru redukcyy za frakcyą  $\frac{a-b}{d}$  — — — — — założyła się

ilkość — f, a że po ostatniéy pomiaru redu-  
 kcyi też ilkość — f przeniesiona jest do zgięty  
 części z odmiennym znakiem, więc iako — f

zamieniło się w  $\frac{a-b}{d}$  \* f, tak — — — — — zamienić się

musi w  $\frac{a * b}{d}$  — — — — —, azatém frakcyą tę literalną

obracając na liczby, będzie  $\frac{100-70}{535}$  — — — — — czyli  
 dodałszy 70 do 106, a sumę 170, tudzież  
 170szego mianownika 535 podzieliwszy przez  
 5, będzie na mnieysze terminy zredukowana  
 frakcyą:  $\frac{34}{107}$ ; nakoniec podzieliwszy  $\frac{34}{107}$  przez  
 36



36 tak, iak się pospolite frakcyę dzielą, będzie :  
 $\frac{1224}{107}$ , a zatem będzie  $f = \frac{1224}{107}$ , więc połowa ilkości  
 $f$  czyli  $\frac{f}{2} = \frac{612}{107}$ , a czworogr: téy połowy : =

$$\frac{612}{107} \times \frac{612}{107} = \frac{374544}{11449}, \text{ a zatem } x = \frac{f}{2} \times \sqrt{\frac{a}{d}} \times$$

$$\frac{f^2}{4} = \frac{612}{107} \times \sqrt{\frac{a}{d}} \times \frac{374544}{11449}. \text{ Powtó-}$$

$$\text{re: } \frac{a}{d} = \frac{100}{535}, \text{ czyli dzieląc } \frac{100}{535} \text{ przez } 5, \text{ a}$$

$$\text{wieloraz } \frac{20}{107} \text{ dzieląc przez } 36, \text{ będzie: } \frac{a}{d} =$$

$\frac{720}{107}$ . Téy już frakcyi obydwu terminy przez ie-  
 duż liczbę rozmnożywszy np: przez tegoż sa-  
 mego mianownika 107, walek bynay-  
 mniéy nie odmieniony, będzie  $\frac{77040}{11449}$ , a tak

$$\text{będzie: } \frac{a}{d} = \frac{77040}{11449}. \text{ Cały tedy pomiar zredu-}$$

gowany do iednéy niewiadoméy ilkości bę-

$$\text{dzie: } x = \frac{612}{107} \times \sqrt{\frac{77040}{11449} \times \frac{374544}{11449}}, \text{ czy-}$$

$$\text{li dodając, będzie: } x = \frac{612}{107} \times \sqrt{\frac{451584}{11449}}.$$

Wyciągając zaś z liczby pod znakiem poło-  
 néy ściągę czworograuną przez § XI. będzie

$$x = \frac{612}{107} \times \frac{672}{157}. \text{ Albowiem wyciągając ją na-}$$

przód z licznika 45, 15, 84 przez rzeczony §,  
 będzie czwor: 36 z tabliczki wzięty bliżki liczby

w iwszém

w 1wszém przedziałce umieszczoném 45, którego ściana 6 położy się za 1wszy termin ścienny, a tego czworogran 36 odciągnąwszy od 45, i do reszty 9 przyłączywszy 2gą przedziałkę 15, toż odcięte liczby 91 podzieliwszy przez dwójkę znalezione go 1wszego terminu to jest przez 12, wieloraz 7 będzie 2gim terminem ściennym, który przyłączony do dzielnika 12 i z nim razem rozmnożony przez siebie samego uczyni 889, co odciągnąwszy od 915 i do reszty 26 przyłączywszy 3cią przedziałkę 84, będzie 268,4; podzieliwszy zaś 268 przez dwójkę obydwóch terminów ściennych za ieden wziętych czyli przez 134, wypadnie termin 3ci ścienny = 2, który złączony z tymże dzielnikiem i rozmnożony z nim przez siebie samego uczyni 2684, naostatek produkt ten odciągnąwszy od reszty przedziałki 2gię i od całej 3cię, nic nie zostanie, a zatem ściana z licznika wyciągniona = 672. Podobnym sposobem wyciągnąwszy ją z mianownika, będzie = 107 więc  $x = \frac{612 \frac{4}{7} 672}{107} = \frac{1284}{107} = 12$ . Oszczędzone tedy 100 Czer: Zł: i na prowizyą po 12 od 100 w 1wszym opieki roku dane były. W samém bowiem rzeczy, kiedy Cz: Zł: 100 dane na prowizyą przyniosły zysku 12, zysk ten jest =  $\frac{100}{12}$ , a zatem pierwszoroczna intrata =  $200 * \frac{100}{12}$ ; z której 130 odłożywszy na wydatki, a resztę =  $70 * \frac{100}{12}$  na podobną po 12 od 100 prowizyą dawszy, będzie też prowizya =  $\frac{70}{12} * \frac{100}{12} x \frac{100}{12}$  intrata-

tratę drugoroczną powiększająca, do której  
 łącząc zysk i w szoroczny  $\frac{100}{12}$ , będzie ogólne  
 powiększenie intraty sierocę po dwu latach  
 opieki  $\frac{100}{12}$ ,  $\times \frac{70}{12} \times \frac{100}{144}$ , czyli obróciwszy te  
 frakcye do iednego mianownika, będzie:  $\frac{300}{36} \times$   
 $\frac{210}{36} \times \frac{25}{36} = \frac{535}{36} = 14 \times \frac{31}{36}$ . C.B.D.R.

*Rezolucya 2ga.* Gdyby rzeczony dwuro-  
 czny zysk był całkowitą liczbą wyrażony np:  
 gdyby był  $= 18$  natenczas byłoby  $d = 18$ ,

$a \times b = 170$  f  
 $f = \frac{170}{d}$  byłoby  $= \frac{170}{18}$ , azatém połowa  $=$   
 $\frac{85}{18}$  f<sup>2</sup>  
 $= \frac{85}{18}$ , czworogran zaś téy połowy  $= \frac{4}{18}$

$\frac{85}{18} \times \frac{85}{18} = \frac{7225}{324}$  a  $\frac{100}{18}$   
 $= \frac{100}{18}$  nakoniec  $= \frac{100}{18}$ ,  
 $\frac{18}{18} \times \frac{18}{18} = \frac{324}{324}$  d  $\frac{18}{18}$

czyli mnożąc obadwa terminy przez iednę z  
 liczbę np: przez 18, byłoby:  $\frac{100}{18} \times \frac{18}{18} = \frac{1800}{18}$ ; ca-  
 $\frac{18}{18} \times \frac{18}{18} = \frac{324}{18}$

ły więc ów pomiar:  $x = \frac{1800}{324} \times \sqrt{\frac{a}{d}}$  f<sup>2</sup>  
 $\frac{1800}{324} \times \sqrt{\frac{85}{18}}$

zamieniłby się w następujący:  $x = \frac{85}{18} \times \sqrt{\frac{9025}{324}}$   
 $\sqrt{\frac{1800}{324}} \times \frac{7225}{324}$ , czyli  $x = \frac{85}{18} \times \sqrt{\frac{9025}{324}}$ ;  
 $\frac{1800}{324} \times \frac{7225}{324}$  18 324

a wyciągnąwszy z liczby pod znakiem ścien-  
nym położony ścianę czworogranna przez §  
XI, wypadłby prosty pomiar:  $x = \frac{85}{15} * \frac{45}{15} =$   
 $\frac{180}{15} = 10$  to jest: prowizya od 100 Czerw: Zł:  
w 1wszym roku oszczędzonych. Gdyż biorąc  
10 od 100 w 1wszym, a od  $70 * \frac{100}{15}$  w 2gim  
roku, byłoby ogólne powiększenie dwuletnięy  
intraty  $= \frac{100}{15} * \frac{70}{15} + \frac{100}{10 * 10} = 10 * 7 + 1$   
 $= 18$ . C. B. D. R.

*Rezolucya 3cia ogólna.* Zgaadnienie to sa-  
mo może się ogólnym sposobem rezolwować,  
azatém do wielu innych podobnych przypa-  
dków przytłosować. Niech będzie intrata od  
Oyca Synowi zostawiona nieokręślona  $= r$ ,  
wydatek piérwzoroczny  $= a$ , drugoroczny  
 $= b$ , powiększenie intraty z oszczędzonych  
rych wydatków dwuletnich  $= d$ , będzie re-  
szta z intraty 1wszorocznęy, odciąwszy od  
nięy wydatek,  $= r - a$ , prowizya zaś od

$$r - a$$

nięy będzie:  $\frac{r - a}{x}$ , przeto cała 1wszoroczna

$$x$$

$$r - a$$

intrata  $= r * \frac{r - a}{x}$ , od której odciąwszy

$$x$$

wydatek 2go roku  $= b$ , będzie reszta intra-

$$r - a$$

ty natenże rok  $= r - b * \frac{r - a}{x}$ , a tę dając

$$x$$

znowu na prowizyą  $x$ , będzie prowizya ta  $=$

$$r - b$$

$$\frac{r-b}{x} + \frac{r-a}{x^2}; \text{narescie przyłaczywszy do téy}$$

$$\text{prowizyi i w szoroczną} = \frac{r-a}{x}, \text{będzie po-}$$

$$\text{większenie ogólne dwuletniéy intraty} = \frac{r-a}{x}$$

$$+ \frac{r-b}{x} + \frac{r-a}{x^2}, \text{czyli zredukowawszy i-}$$

$$\text{wsze dwa terminy, będzie} = \frac{2r-a-b}{x} + \frac{r-a}{x^2}.$$

Tu już dla ułatwienia dalszéy redukcji zakładając litery pojedyncze za wielokrotne, to jest: m za  $2r-a-b$ , c zaś za  $r-a$ , będzie

$$\text{ogólne intraty powiększenie} = \frac{m}{x} + \frac{c}{x^2};$$

ażé za toż powiększenie na początku założyło

$$\text{się d; więc wypadnie pomiar: } \frac{m}{x} + \frac{c}{x^2} = d,$$

który uwalniając od frakcyi, czyli mnożąc przez

$$mx^2, \text{będzie: } \frac{mx^2}{x} + c = dx^2, \text{dzieląc iwszy ter-}$$

$$\text{min, będzie: } mx + c = dx^2, \text{przekładając } mx \text{ do zgiéy części, będzie: } c = dx^2 - mx, \text{na-}$$

ostatek



ostatki dzieląc przez d, będzie:  $\frac{c}{d} = x^2$

$\frac{mx}{d}$ , czyli  $x^2 = \frac{mx}{d} = \frac{c}{d}$  pomiar czworog:

w którym obróciwszy litery wyrażające ilko-  
ści wiadome na liczby i ścianę czworogranną  
wyciągnąwszy, znajdzie się prowizya zapytana.  
Damy np: że r (czyli intrata roczna od Oyca  
Synowi zostawiona) = 400 Cz: Zł., a (czy-  
li wydatek rwzoroczny) = 200 Cz: Zł, b  
(czyli wydatek drugoroczny) = 260, d (czy-  
li powiększenie intraty) = 36, więc m (po-  
nieważ założone było za  $2r - a - b$ ) =  
340, c zaś założone będąc za  $r - a = 200$ ,  
azatém zredukowany ostatni pomiar:  $x^2 =$   
 $\frac{mx}{d} = \frac{c}{d}$

— obróciwszy na liczby, zamieni się  
d d

w ten:  $x^2 = \frac{340x}{36} = \frac{200}{36}$ , który, iako wido-  
czna, nie jest zupełny; dopełniając go więc  
czyli z połowy współczynnika 2go terminu  
robiąc czworogran, to jest: przez  $\frac{2}{1}$  dzieląc  
frakcyą  $\frac{340}{36}$ , albo raczey wśpak obróciwszy  
dzielnika, przez  $\frac{1}{2}$  mnożąc ją, a produkt  $\frac{340}{72}$  wy-  
nosząc do 2go stopnia, będzie:  $\frac{115600}{5184}$ , który  
do obywoch pomiaru części dodając, będzie do-  
pełniony pomiar:  $x^2 = \frac{340x}{36} + \frac{115600}{5184} = \frac{200}{36} +$   
 $\frac{115600}{5184}$ . Dopiero wyciągając z iwtzey części  
ścianę czworogranną, będzie iwtzy termin  
ścienny

ścienny :  $= x$  , przez którego dwójkę to jest przez  $2x$  dzieląc —  $\frac{340x}{72}$  (podłożywszy 1 pod  $2x$  i przez  $\frac{1}{2x}$  rozmnożywszy —  $\frac{340x}{72}$ ) będzie  $x = \frac{340x}{72}$  czyli podług reguły dzielenia,  $x$  tak w liczniku , iako i w mianowniku wymaza-  
wszy , będzie ściana zupełna :  $x = \frac{340}{72}$  , z której czworogran zrobiony i od iwszłej części odciągniony żadney reszty nie zostawi , azatém pomiar co do iwszłej części zreduko-  
wany będzie :  $x = \frac{340}{72} = \sqrt{\frac{200}{72} + \frac{115600}{5184}}$  ,  
czyli  $x = \frac{340}{72} + \sqrt{\frac{200}{72} + \frac{115600}{5184}}$  . Chcąc zaś wyciągnąć tęż ścianę z zgięty części z terminów pod znakiem położonych , obrócić wprzód po-  
trzeba frakcye do iednego mianownika , mno-  
żąc przez 144 , będzie :  $\frac{28860}{5184} + \frac{115600}{5184}$  , a te do-  
dając , będzie :  $x = \frac{340}{72} + \sqrt{\frac{144400}{5184}}$  , toż wy-  
ciągnąć rzeczoną ścianę przez § XI. z liczni-  
ka i mianownika , będzie :  $x = \frac{340}{72} + \frac{380}{72}$  ,  
czyli dodając :  $x = \frac{720}{72} = 10$  . Pozostała więc  
summa od wydatku iwszorocznego  $= 200$   
Cz. Zł. była dana na prowizyą po Cz. Zł. 10 od  
100. Jakoż biorąc po 10 do 100, wypada ogól-  
ne powiększenie intraty przez dwa lata :  $\frac{200}{100} +$   
 $\frac{140}{100} + \frac{200}{100 \times 100} = 20 + 14 + 2 = 36$  . C.B.D.R.

*Prześtroga.* Można łatwo z istoty zagą-  
dnienia ośtatniego wyczerpnąć tę wiadomość  
arcy-potrzebną : że gdyby z podobnemi warun-  
kami powiększania corok śierocę intraty o-  
pieka daléy się ciągnęła , intrata owa coraz  
bardziéy pomnażałaby się , np: gdyby opieka  
przez 3 lub 4 lata trwać miała , w rezolwo-

waniu takiego zagadnienia pomiar wypadłby w 3im lub 4tym stopniu tak dalece, że w zagadnieniach tego gatunku ekwacye mogłyby wszelkich domysłnych stopniów dochodzić. Co rzeczywiście jest dowodem: że różne społeczeństwa ludzkiego interesła nie łatwo się obeydą bez tćy nawet części Algebry, która o pomiarach wyższe stopnie w sobie zawierających traktuje. Nie jest to tedy ciekawość iaka prożna zabawce dowcipu służąca, szukać sposobów rezolwowania trzeciostopniowych, lub nad 3ci wyższe jeszcze stopnie w sobie zawierających pomiarów, ponieważ ciekawość ta rodzi się z potrzeb towarzystwa ludzkiego nieuchronnych. Z tego powodu przyda się tu jeszcze krótka nauka licznemi przykładami objaśniona o Pomiarach nad 3gi stopień wyższych.

## ROZDZIAŁ VI.

### *O Pomiarach Sześciogrannych i ich redukcyi.*

**N**im się przyydzie do redukcyi tych pomiarów, należy wprzód krótko przełożyć wewnętrzny ich skład, różność ścian w nich ukrytych i odmiany terminów też pomiary składających, bez czego redukcyi saméy uczynić nie można.

#### § XIX. Skład wewnętrzny tych pomia-

miarów, owszem i nad te wyższych dorazu się okaże, wzięwszy iakiekolwiek ściany i na pomiary je proste obróciwszy, które gdy się przez siebie rozmnożą, wypadną w produkcie pomiary składane tylu stopniów, ile się ścian do innożenia wzięło, a te cały skład swój na oko pokażą; np: wzięwszy  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $x = c$ , czyli:  $x - a = 0$ ,  $x - b = 0$ ,  $x - c = 0$  przez § XVI. p. II, i rozmnożywszy 1wszy z tych prostych pomiarów przez 2gi, a produkt przez 3ci, wypadnie pomiar sześciogranny przez tenże §. p. III.

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 + abx \\ - bx^2 + acx - abc = 0. \\ - cx^2 + bcx \end{aligned}$$

który gdyby był rozmnożony przez inny prosty, zamieniłby się w czwartostopniowy *it. d.* a iak tego, tak i innych skład z samych terminów oczywiście dałby się widzieć.

§ XX. Co się tycze ścian sześciogranych i innych wyższostopniowych, wiedzieć trzeba I. Ze w każdym składanym pomierze tyle ścian być musi, ile niewiadoma ilkość w 1wszym terminie zawarta ma w sobie wymiarów stopniowych, to jest: w pomierze sześciogrannym trzy zawsze być muszą ściany, w czwartostopniowym 4, *it. d.* II. Ilkości wiadome w 2gim terminie zawierają sumę wszytkich ścian pod znakiem przeciwnym, to jest: ściany dodatne pod znakiem —, odciążne pod znakiem +, w 3cim zaś terminie zawierają

dukt dwóch ścian pod znakiem własnym, a w 4tym produkt wszystkich ścian pod znakiem przeciwnym, co oczywiście daje się widzieć w przykładzie wyżej przytoczonym; a ślad już można się dorozumiewać, które i jakie ściany pomiar składany w sobie zawiera. III. Ile jest terminów z odmiennemi znakami — i  $\ast$  na przemiany położonych w pomiarze składanym, tyle jest ścian rzetelnych, a tyle odciążnych, ile terminów jednoznacznych, które będąli wszystkie dodatne, ściany wszystkie muszą być nierzetelne, i przeciwnie. IV. Ile razy ściany rzetelne równe są nierzetelnym, tyle razy 2gi termin pomiaru ginie, np: jeśli  $x=2$ , potem  $x=3$ , nareszcie  $x=5$ , zrobiwszy z tych trzech prostych pomiar sześciogranny, będzie bez 2go terminu  $x^3 + 19x + 30 = 0$ . Jeśli zaś ścian rzetelnych więcej jest od nierzetelnych, termin 2gi musi być odciążny, i przeciwnie. V. Na poznanie, iaka jest ściana: dodatna, czy odciążna, prócz namienionych są i te jeszcze sposoby, *infty*: Wziąć ilkość dwukrotną z niewiadomej i wiadomej złożoną, i podzielić przez nią dany pomiar, ta, byle bez reszty podzieliła, pokaze ścianę z przeciwnym znakiem, np: podzieliwszy przez  $x-4$  pomiar:  $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ , ponieważ podział bez reszty się udaje, pokazuje ścianę z przeciwnym znakiem to jest  $\ast 4$  przeto, iż pomiary składane wypadają z mnożenia, a dzielenie mnożeniu jest prze-



przeciwnie. *2gi*: Założywszy w pomierze danym za niewiadomą ilkość wiadomą iakąkolwiek, ieśli ta dla znaków przeciwnych zepsuje wszystkie jego terminy, będzie ścianą szukaną *np*: w pomierze:  $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$  założywszy  $+ 4$  za  $x$ , będzie  $64 - 48 - 40 + 24 = 0$ , 4 więc ieść ścianą tego pomiaru dodatną.

*Przeestroga*. Sposoby te poznawania ścian sześciogrannych skrócić czalem mogą i zastąpić przydłuższe niżey położone sposoby redukowania pomiarów wyższostopniowych, iako się da widzieć niżey w rezolucyi iwszych zagadnień między przykładami pomiarów sześciogrannych.

§ XXI. Trafia się potrzeba zamienienia ścian rzetelnych w nierzetelne i przeciwnie, tudzież zwiększenia ich lub zmniejszenia inną iaką ilkością, co się tak dzieła: *I*. Odmieniwszy w składanym pomierze znaki terminów parzystych, to ieść 2go, 4tego *i t. d.* tém samém odmienione zostaną ściany rzetelne w nierzetelne i przeciwnie, *np*: w pomierze:  $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ , gdzie, iako się pokazuje z samych znaków, przez § poprzedz dwie są ściany rzetelne, a jedna nierzetelna, odmieniwszy znaki 2giego i 4tego terminu, żeby było:  $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$ , zamienią się i ściany w przeciwnie. *II*. Chcąc powiększyć tegoż samego pomiaru  $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$  wiadome ściany liczbą *np*: 3, robi

3, robi się prosty pomiar  $x + 3 = y$ , czyli  $x = y - 3$ , i zakłada się ta cena za  $x$  w danym pomiarze, wynosząc ją całą do tegoż stopnia, do którego  $x$  w każdym terminie danego pomiaru jest wyniesione, a stopnie te przez współczynnikiów téjże ilkości  $x$  mnożąc, będzie:

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 & | & = y^3 - 9y^2 + 27y - 27. \\
 - 3x^2 & | & - 3y^2 + 18y - 27. \\
 - 10x & | & - 10y + 30. \\
 + 24 & | & + 24.
 \end{array}$$

---


$$\text{Summa} = y^3 - 12y^2 + 35y - 24 = 0.$$

Gdzie ściany danego pomiaru są zwiększone liczbą 3 tak, że które przedtém przez §. poprzedzający były  $= 2 + 4 + 3$ , stały się  $= 5 + 7 + 0$ , gdyż  $+ 3 = 3$  dla przeciwnych znaków  $= 0$ . Podobnie się działa zmniejszając ściany, byle liczba do zmniejszenia wzięta była z przeciwnym znakiem, czego przykład będzie niżej.

§ XXII. Odmiany terminów składających pomiar sześciogranny lub inny wyższostopniowy zależą albo na rugowaniu iakiego terminu z pomiaru, albo na wyszukaniu go dla dopełnienia pomiaru i ułatwienia dalszégó redukcyi. I. Rugować się z pomiaru składanego najczęściej zwykły termin 2gi, który gdy jest z znakiem  $+$ , wyruguje się i zgubi, zwiększwszy ściany pomiaru współczynnikiem tegoż samego terminu 2giego podzielonym

lonym przez wykładnika i wszego terminu, a gdy jest z znakiem —, wyruguje się zmniejszywszy ściany iego (przez §. poprzedz:) tymże i tak podzielonym współczynnikiem: Niech będzie np: pomiar  $x^3 - 12x^2 + 44x - 4x = 0$ , w którym rugując termin 2gi, dzielę iego współczynnika przez wykładnika terminu i-wszego, będzie  $\frac{12}{3} = 4$  wieloraz, którym dla znaku — zmniejszyć trzeba ściany danego pomiaru. Wziąwszy więc  $x - 4 = y$ , czyli  $x = y + 4$ , i założywszy za  $x$  tę cenę wyniesioną do iednych z nim stopniów w pomierze danym przez § poprzedzający, będzie:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & = y^3 + 12y^2 + 48y + 64. \\
 - 12x^2 & - 12y^2 - 96y - 192. \\
 + 44x & + 44y + 176. \\
 - 48 & - 48.
 \end{array}$$

Sum: bez 2go terminu.  $= y^3 + 4y = 0$  i t. d.

11. Do dopełnienia pomiaru sześciogrannego (co i wyższostopniowym służy) terminem 2gim dosyć jest, zwiększyć ściany iego ilkością wiadomą, tak np: chcąc dopełnić pomiaru  $x^3 - 19x - 30 = 0$  terminem 2gim, którego tu brak, biorę  $x + 1 = y$ , czyli  $x = y - 1$ , i zakładam tę cenę za  $x$  w danym pomierze, wynosząc ją do iednych z  $x$  stopniów, będzie:

$x^3$

$$\begin{array}{r}
 x^3 \mid = y^3 - 3y^2 + 3y - 1. \\
 \hline
 - 19x \quad \quad \quad - 19y + 19. \\
 - 30 \quad \quad \quad - 30. \\
 \hline
 \text{Sum: z term:} \quad \quad \quad \hline
 \text{zgin:} \quad \quad \quad y^3 - 3y^2 - 16y - 12 = 0.
 \end{array}$$

§ XXIII. O redukcyi pomiarów  
szczęciogrannych.

Jeżeli się trafią w nich frakcye, te przed wyrugowaniem ieszcze terminu zgiego zgubić trzeba iednym z następujących sposobow, to iest: albo mnożąc niewiadomą danego pomiaru ścianę  $x$  przez produkt mianowników wszystkich i cenę ię zakładając za nią w danym pomierze, albo z powszechnéy mianowników miary, iесли się znajdzie, zrobiwszy progressyą Geometryczną zaczynającą się od 1, przez każdy termin téy progressyi mnożąc każdy odpowiadający termin pomiaru, a potem frakcye na całkowite obracając; np: gubiąc frakcye i wżym sposobem w tym pomie-

$$\text{rze: } x^3 - \frac{ax^2}{b} + \frac{a^2x}{c} - \frac{a^3}{b} = 0, \text{ mnożę}$$

ścianę pomiaru niewiadomą  $x$  przez  $bcd$ , a produkt  $bcdx$  równam z inną niewiadomą ilkością np:  $y$ , żeby było:  $bcdx = y$ , czyli  $x =$

$$\frac{y}{bcd}, \text{ i tę cenę zakładam w danym pomierze za } x,$$

wynosząc

wynosząc ją do iednychże z x stopniów, będzie:

$$\frac{y^3}{b^3c^3d^3} - \frac{ay^2}{b^3c^2d^2} + \frac{a^2y}{bc^2d} - \frac{a^3}{d} = 0,$$

dopiero mnożę przez  $b^3c^3d^3$  wszystkich liczników prócz iwlżego i frakcye na całkowite obracam, wypadnie pomiar bez frakcyi:  $y^3 - acdy^2 + a^2b^2cd^2y - a^3b^3c^3d^2 = 0$ . Gubiąc zaś drugim sposobem frakcye w tym np:

$$\text{pomierze: } y^3 - \frac{7y^2}{3} - 4y - \frac{32}{3} = 0, \text{ z 3 ia-}$$

ko powszechny mianowników miary robię progressy 1. 3. 9. 27. i tak układam:

$$y^3 - \frac{7y^2}{3} - 4y - \frac{32}{3} = 0.$$

1.      3.      9.      27.

toż przez każdy zosobna termin progressyi mnożę odpowiadający termin każdy pomiaru, i frakcye redukuję na całkowite, będzie:  $y^3 - 7y^2 - 36y - 288 = 0$  i t. d.

§ XXIV. Po zgubieniu frakcyi i terminu zgo chcąc daléy redukować pomiar sześciogranny (co i o innych wyższych ma się rozumieć) doświadczyć naprzód można powszechniejszych redukowania sposobów w § XVII. opisanych, a ieżli z tantych żaden się nie uda, trzeba dany pomiar obrócić do iednéy któręy z tych formuł:





$$x^3 \cdot * \text{---} px \text{---} q \text{---} o$$

$$x^3 \cdot * \text{---} px \text{---} q \text{---} o$$

$$x^3 \cdot * \text{---} px \text{---} q \text{---} o.$$

które wyrażają wszelkie pomiary sześciogranne uwolnione od terminu 2go i pokazują sciany ich, bez których poznanie nie uczyni się redukcya. Sciany te z samych znaków położonych przed terminami formuł pokazują się. Jeśli wszystkie 3 są rzeczywiste (obacz wykład wyrazów w § XV.) muszą być dwie rzetelne, 3cia nie rzetelna równa tamtem obydwom, inaczej drugi termin nie byłby wyrugowany. Są zaś wszystkie 3 rzeczywiste, kiedy termin 3ci ma przed sobą znak —, czyli kiedy jest — p, iako w formule 1wszój i 2giój; są 2 rzetelne a 1 nierzetelna, kiedy ostatni termin jest z znakiem \* czyli \* q, iako w formule 1wszój, są 2 imaginaryjne, a 1 rzeczywista, kiedy jest ± q, iako się niżej pokaże w p. IV. Ciężej trochę poznać: czy rzeczywiste sciany są sobie równe i które są równe sobie, tudzież czy jest iaka i która jest doskonała, a którą niedoskonała. I. Ułatwiając jednak te trudności i chcąc naprzód poznać równość ścian rzeczywistych, wziąć trzeba z którejkolwiek formuły terminy 3ci i ostatni, to jest: px i q, i zrobiwszy naprzód sześciogran z 3ciój części współczynnika terminu 3go to jest z  $\frac{1}{3}p$ , potem czworogran z połowy terminu ostatniego czyli z  $\frac{1}{2}q$ , zrównać

wnać trzeba ieden z 2gim, a ieśli te będą  
sobie równe i ściany ich być muszą także  
równe. Niech będzie pomiar  $np: x^3 - 12x$   
 $\mp 16 = 0$ , który mając ostatni termin z znakiem  
 $\mp$ , mieć powinien dwie ściany rzetelne a  
iedną nierzetelną; chcąc więc poznać: czy  
tamte są sobie równe, zakładam za terminy  
danego pomiaru terminy formuły i wżęy,  
będzie:  $p = 12$ ,  $q = 16$ ; więc sześciogran  
z  $\frac{1}{3}p$  będzie  $\frac{1}{3}p^3$ , a w liczbie biorąc  $\frac{12}{3} =$   
 $4$ ; i wynosząc do 3go stopnia, będzie:  $64$ ,  
czworogran zaś z  $\frac{1}{2}q$  będzie:  $\frac{1}{4}q^2$ , a w li-  
czbie z  $\frac{16}{2}$  czyli z 8 będzie  $64$ ; aże  $64 = 64$ ,  
ściany więc danego pomiaru rzetelne obie są  
sobie równe, z których chcąc iedną wynaleść,  
dzielę trójkę ostatniego terminu przez dwóy-  
kę wipółczynnika terminu 3go, wieloraz po-  
każe ścianę szukaną to ieść:  $\frac{3q}{2} = 48$

Ponieważ zaś dwie ściany rzetelne są sobie ró-  
wne, toć kiedy iedna  $= 2$ , i 2ga musi być  
 $= 2$ , a 3cia nierzetelna tych summie równa  
musi być  $= 4$ , iako się wyżej namieniło.  
II. Chcąc zaś poznać: czy ściana nierzetelna  
doskonałą ieść lub nie, odciągam ilkość  $p$  od  
czworogranu blisko większego, a przez resztę  
dzielę  $q$ , ieśli wieloraz ten będzie ścianą rze-  
czonego czworogranu, będzie ścianą doskona-  
łą, inaczey będzie niedoskonałą. Daymy  $np:$   
 $x^3 - 39x \mp 70 = 0$  porównawszy te termi-  
ny

ny z terminami formuły iwszędzy, będzie:  
 $p = 39$ ,  $q = 70$ , czworogran blisko więk-  
 kszy od  $p$  czyli od 39 jest 49, od którego  
 tamten odciągnąwszy (odmieniając znaki w ilko-  
 ści odciążnędzy podług Przep: Subtrakcyi) bę-  
 dzie  $49 - 39 = 10$ , a przez tę resztę  
 dzielę  $q = 70$ , wieloraz  $7$  równy ścianie  
 czworogranu rzeczzonego pokazuje ścianę nie-  
 rzetelną doskonałą. III. Chcąc nad to poznać:  
 która z rzetelnych ścian jest doskonała, biorę  
 czworogran blisko mniejszy od  $p$  i odciągam  
 go od  $p$ , a przez resztę dzielę  $q$ , będzie wielo-  
 raz ścianą wziętego czworogranu, tém sa-  
 mém będzie ścianą doskonałą; a ieżli żaden  
 taki nie znajdzie się czworogran, ściany będą  
 niedoskonałe. Tak w przykładzie wyżęy da-  
 nym czworogran mniejszy od  $p$  czyli od 39  
 jest 36, ten odciągnięty od tamtego daje re-  
 sztę  $= 3$ , przez którą podzielone  $q$  czyli 70  
 do wieloraz  $23 \frac{1}{3}$ , który nie jest ścianą rze-  
 czzonego czworogranu, więc biorę jeszcze  
 mniejszy czworogran 25, który odciągną-  
 wszy od  $p$  będzie  $39 - 25 = 14$ , a przez  
 tę resztę podzieliwszy  $q = 70$ , wieloraz 5  
 równy ścianie wziętego czworogranu będzie  
 jedną z ścian doskonałych rzetelnych *i. t. d.*  
 IV. Chcąc nakoniec poznać, które mię-  
 dzy rzeczywistemi ścianami są imagina-  
 ryjne, uważam 3ci termin w ogólnęy for-  
 mule wyrażony przez  $p$ , który, kiedy ma  
 przed sobą znak  $+$ , dwie ściany pewnie bę-  
 dą

dą imaginaryyne równie iako i wtenczas, kiedy ma wprowadzić znak —, ale  $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} q^2$ , czyli gdy sześciogran z 3cię części terminu 2go mnieyszy jest od czworogranu z połowy terminu ostatniego, a wtenczas albo ta będzie formuła:  $x^3 * * px \pm q = 0$ , albo ta:  $x^3 - px \pm q = 0$ . Będą także ściany imaginaryyne, kiedy pomiar będzie czysty czyli bez 2go i 3go terminu zgodny z tą formułą:  $x^3 * * *$  lub  $-q = 0$ .

§ XXV. O dokończeniu téżę redukcyi.

Poznawszy przez poprzedzający §: że w pomierze sześciogranym po części już zredukowanym znajduje się między imaginaryynemi choć iedna ściana rzeczywista doskonała lub niedoskonała, użyć można do dokończenia redukcyi iego iednego z tych sposobów, które się w tym i następującym §. wyłuszcza. A naprzód można wziąć czworogran blisko mnieyszy lub większy od  $\pm p$  czyli od terminu 3go (bierze się większy, gdy w danym pomierze jest — p czyli gdy 3ci termin jest odciążny, mnieyszy zaś, gdy jest \* p) i odciągnawszy go od — p, jeśli się wziął większy, lub dodawszy do \* p, jeśli mnieyszy, przez resztę lub sumę podzielić q czyli termin ostatni, wieloraz, będzieeli równy ścianie czworogranu wziętego, będzie ścianą rzeczywistą danego pomiaru, a ścianą doskonałą przez § po-

poprzedzający, która dokończy redukcji, gdyż przy rostrzaniu warunków zagadnienia pokaże dorazu inne ściany w tymże pomiarze zawarte, iako się da widzieć w następujących dwóch przykładach: I. Niech będzie pomiar:  $x^3 - 1x * 6 = 0$  zgodny z formułą  $x^3 * - px * q = 0$ , których porównawszy terminy, będzie:  $p = -1$ ,  $q = 6$ , azatém, ponieważ  $\frac{1}{27} p^3$  czyli sześciogran z 3cię części współczynnika terminu 3go mniejszy jest od  $\frac{1}{4} q^2$  czyli od czworogranu połowy terminu ostatniego, gdyż  $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{27}$ , a  $\frac{1}{4} q^2 = 9$  przez wzmiankowany §, ściany być muszą dwie imaginaryne, 3cia rzeczywista, którey szukając biorę czworogran 4 blisko większy od  $p$  czyli od terminu 3go (gdyż  $-p = 1$ ) i odciągam go od  $-p$  czyli  $-1$ , odmieniwszy znaki, a przez resztę  $-3$  dzielę  $q = 6$ , wieloraz, który jest ścianą wziętego czworogranu, będzie ścianą danego pomiaru rzeczywistą, odciążną wprowadzić, ale doskonałą  $= -2$ , która w rostrzaniu warunków pokaże inne imaginaryne i t. d.

II. Niech będzie dany ieszcze pomiar:  $x^3 * 27x - 28 = 0$  zgodny z formułą  $x^3 * - px - q = 0$  przez  $-p$  wyrażający dwie ściany imaginaryne, a 3cią rzeczywistą, którey szukając, biorę czworogran blisko mniejszy 1, i dodaję go do  $p = 27$ , a przez sumnę  $= 28$  dzielę  $q = 28$ , wieloraz  $= 1$  jest ścianą wziętego czworogranu, azatém ścianą pomiaru rzeczywistą dodatnią i doskonałą. i t. d.



§ XXVI. Drugi sposób znalezienia ściany rzeczywiſtęy , azatém zredukowania pomiaru ſześciogrannego iedną przynajmnięy ſcianę doskonałą w ſobie zawierającego ieſt ten: Mając *np.* pomiar:  $x^3 + 12x = 427$  , uważam : czy ſześciogran ilkoſci niewiadomęy  $x^3$  mnieyſzy ieſt od ſześciogranu wiadomęy 427, czy też więkſzy. I. Jeżeli mnieyſzy, iaki ieſt w danym przykładzie (gdyż przeniósłzy  $12x$  do zgięy części, będzie  $x^3 = 427 - 12x$ , więc kiedy  $x^3$  wraz z  $+ 12x$  wyrównywało ilkoſci 427 , toć ſamo  $x^3$  muſi być od nięy mnieyſze) wziąć trzeba ſześciogran nieco mnieyſzy od ilkoſci wiadomęy 427 *np.* ſześciogran 343 , którego ſciana  $= 7$  i odciągnać go od téyże ilkoſci wiadomęy , odciągając razem i ſześciogran ilkoſci wiadomęy  $x^3$  od  $x^3$  , z reſzty  $12x = 84$  wypadnie ſciana doskonała  $x = 7$  równa ſcianie wziętego ſześciogranu. Oto wzór tego działania:

$$\begin{array}{r} x^3 + 12x = 427 \\ - x^3 \quad \quad = 343 \\ \hline 12x = 84, \text{ czyli } x = \frac{84}{12} = 7. \end{array}$$

II. Jeżeli zaś rzeczony ſześciogran więkſzy ieſt od ilkoſci wiadomęy w zgięy pomiaru części poſłożonęy, iaki ieſt w tym pomiarze:  $x^3 - 12x = 1584$  gdzie  $x^3 > 1584$ , bo  $x^3 = 1584 + 12x$ , wtenczas więkſzy od ilkoſci wiadomęy 1584 bierze ſię ſześciogran 1728 , którego ſciana  $= 12$  i odciąga ſię tak ten ſześciogran wzięty od rzeczonęy ilkoſci, iako

iako sześciogran niewiadoméy  $x^3$  od  $x^3$ , reszta, będąci ścianą sześciogranu wziętego, tém samém będzie ścianą pomiaru szukaną. Wzór działania:

$$\begin{array}{r} x^3 \text{ --- } 12x \text{ --- } 1584 \\ \text{--- } x^3 \qquad \qquad \text{--- } 1728 \text{ --- } 12x \text{ --- } 144. \end{array}$$

Przenosząc:  $144 = 12x$ , czyli:  $x = \frac{144}{12} = 12$ .

*Prześtroga 1.* Gdyby w przykładzie jakim sześciogran wzięty blisko mniejszy od ilkości wiadoméy i od niéy odciągniony nie dał reszty ścianie swoiéy równéy, wtenczas bierze się ieszcze mniejszy i t. d. np: mając:  $x^3 + 27x = 28$ , a biorąc sześciogran 27 i odciągając od 28, reszta  $= 1$  nie daje ściany 3 równéy ścianie wziętego sześciogranu, gdyż wychodzi na  $x = \frac{1}{27}$ , więc bierze się sześciogran ieszcze mniejszy 8 i odciąga się od 28, lecz i stąd reszta  $x = \frac{20}{27}$  nie jest wziętego sześciogranu ścianą  $= 2$ ; zaczęm najmniejszy się bierze 1, który odciągniony od 28 da ścianę szukaną, gdyż będzie:

$$\begin{array}{r} x^3 + 27x = 28 \\ \text{--- } x^3 \qquad \qquad \text{--- } 1 \end{array} = 27x = 27, \text{ czyli } x = \frac{27}{27} = 1.$$

*Prześtroga 2.* Kiedy pomiar sześciogranny jest czyſty wyrażony tą formułą:  $x^3 + * + q = 0$ , zawiera w sobie dwie ściany imaginaryne, a iedną rzeczywistą  $= x - \sqrt{q} = 0$ , przez którą znalezioną w liczbach podzieliwszy go zamieni się w czworogranny, o którego redukcji mówiło się w § XVIII.

PRZY-

# PRZYKŁADY ZAGADNIEN

## I redukcji pomiarów sześciogrannych.

*Zagadnienie iwsze toż samo prawnie, które było ostatniem między przykładami Pomiarów czworogrannych w § XVII.*

Ociec umierający zostawił Synowi swemu intraty roczney Cz: Zł: 200, z której Opiekun, odkładając corok po 100 na wychowanie dziecięcia, drugie 100 zaraz na początku iwszego opieki roku dał na prowizyą, 2go zaś i 3ciego roku nie tylko rzeczzone 100 dał na tęż prowizyą, lecz i prowizye od niego regularnie odbierane. Po 3cim roku pokazało się zysku, który powiększył Sieroty intratę od Ojca zostawioną, Czerw: Zł: 33  $\frac{1}{10}$ . Pytam, na jaką prowizyą wzmiarkowane 100 Czerw: Zł: były dane?

Rezolucya Niech będzie prowizya niewiadoma od  $100 = \frac{100}{x}$  (czytaj Rezolucyą z przypiskiem wyżej na K. 119) będzie też prowizya

w 2gim roku:  $\frac{100}{x} \cdot \frac{100}{x^2}$ , w 3cim:  $\frac{100}{x} \cdot \frac{100}{x}$

$\frac{200}{x^2} \cdot \frac{100}{x^3}$ ; azatém dodawszy te trzy-

letnie niewiadome prowizye i zrównawszy ie z wiadomym po trzech leciech zyskiem, będzie pomiar sześciogranny:

K 100

$$\begin{array}{ccccccc} 100 & 100 & 100 & 100 & 200 & 100 & \\ \hline \text{---} \ast \text{---} \ast \text{---} \ast \text{---} \ast \text{---} \ast \text{---} & = 33 \ast \frac{1}{10} \\ x & x & x^2 & x & x^2 & x^3 \end{array}$$

$$\text{Czyli dodając terminy podobne: } \begin{array}{ccc} 300 & 300 & 100 \\ \hline \text{---} \ast \text{---} \ast \text{---} \\ x & x^2 & x^3 \end{array}$$

$$= 33 \ast \frac{1}{10}.$$

Skracając redukcją tego pomiaru, która przez inne sposoby byłaby i długa i trudna, wziąć można na domysł ścianę, iaka najpodobniejsza do ufatwienia Zagadnienia tego zdawać się będzie, i w każdym terminie tegoż pomiaru założyć ją za  $x$  wyniesioną do jednegoż z niēm stopnia, aieżeli po tém założeniu wypadnie iwisza część pomiaru doskonale równa zgięty, ściana wzięta będzie zapytaną prowizyą, alboteż przez § XX. p. V. przeniósłszy zgą część pomiaru do iwszęzy i zrównawszy ułożone porządnie terminy z 0, toż założy, wszy za  $x$  na domysł ścianę, iak pierwcy, ieżeli wszystkie terminy zepsują się, ściana wzięta będzie rzeczoną prowizyą. I tak iwszym sposobem będzie:

$$300 \quad 300 \quad 100$$

$$\text{---} \ast \text{---} \ast \text{---} = 33 \ast \frac{1}{10} = 30 \ast 3 \ast \frac{1}{10} = 33 \ast \frac{1}{10}$$

$$10 \quad 100 \quad 1000$$

$$\text{w 2gim będzie: } \frac{1}{10} \ast 3 \ast 30 \text{ --- } 33 \ast \frac{1}{10} = 0.$$

Jakoż ieżeli w iwszym roku od 100 prowizya:  $\frac{100}{10} = 10$ , będzie w 2gim:  $\frac{100}{10} \ast \frac{100}{100} = 10 \ast 1$ , a w 3cim:  $\frac{100}{10} \ast \frac{100}{100} \ast \frac{100}{100} = 10 \ast 2 \ast \frac{1}{10}$ ; co wśytko uczyni:  $33 \ast \frac{1}{10}$ . C. B. D. R.

Za-

Zagadnienie 2gie imszemu podobne: Daje kto towarzysłwu kupieckiemu na handel sum-  
mę 1000 Cz: Zł: z warunkiem: żeby mu też  
summa we trzy lata oddana była nie tylko  
z prowizyą od kapitału, ale też z prowizyą  
od samych prowizy, czyli, iak nazywają, z  
lichwą. Przyięty warunek, a summa we trzy  
lata oddana pokazała się większą od daney  
331 Cz: Zł. Pytam, na iaką od sta prowizyą  
rzeczona summa była dana?

Rezolucya naykrótsza też sama, co poprze-  
dzającego Zagad: Prowizya niewiadoma w

$$\begin{array}{ccccccc} & 1000 & & & 1000 & & \\ & x & & & x & & \\ 1000 & & 1000 & & 2000 & & 1000 \\ \hline & x^2 & & x & & x^2 & x^3 \end{array}$$

a te prowizye w iedną summę zebrane i z o-  
gólnym zyskiem zrównane dadzą pomiar:

$$\frac{3000}{x} + \frac{3000}{x^2} + \frac{1000}{x^3} = 331.$$

$$\text{Zakładając w nim 10 za } x, \text{ będzie: } \frac{3000}{10}$$

$$+ \frac{3000}{100} + \frac{1000}{1000} = 331.$$

$$\text{Redukując frakcye: } 300 + 30 + 1 = 331 \text{ i t. d. C. B. D. R.}$$

K<sub>2</sub>

Zaga-



Zagadnienie 3cie toż samo, które było  
 1tém między czworogranem, ale tu do 3go  
 stopnia pomiesiane. Lewny Kapitałista dał ku  
 pcowi do 3 lat sumnę Cz: Zł: 10,000 na pro-  
 cent umówiony, po 3 latach upłynionych  
 gdy kupiec zbankrutował, cały majątek swój  
 prawem przyciśniony oddać musiał kredytorom  
*in potioritatem*, skąd na wzmiarkowanego ka-  
 pitałistę nie przypadło tylko 7,210 Czer: Zł.  
 Traci więc ogólnie na kapitale swoim 2,710  
 Czer: Zł: Pytam: ile na stu traci?

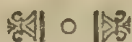
Rezolucya mogłaby być ta sama, co  
 poprzedzających Zagadnień; ale postąpmy już  
 od tego Mechanicznego do prawdziwie Alge-  
 braicznych rezolwowania spółobów trudniej-  
 szych wprawdzie i dłuższych, ale też nieró-  
 wnie pewniejszy. Założywszy za stratę nie-  
 wiadomą  $x$ , szukać ię na każdy rok trzeba  
 tak, jak wyżej w Rezolucyi tego samego Za-  
 gadnienia między przykładami czworogran-  
 nych; będzie po 1wszym roku rzeczona stra-  
 ta  $= 100x$ ; po 2gim  $= 100x +$

$x^2$ ; po 3cim  $= 100x + 2x^2 +$

te straty w jedną sumnę zebrawszy i z ogólną  
 stratą zrównawszy, wypadnie pomiar szczęś-  
 cigranny:

$$\frac{3000 + 3x^2}{100} = 2710.$$

Czyli



Czyli przez § XVI: —  $x^3$  —  $3x^2$  +  $300x$   
100

→  $2710 = 0$ .

Gubiąc frakcye, będzie:  $x^3 - 300x^2 + 30000x - 271000 = 0$ .

Rugując zaś termin 2gi przez § XXII, czyli zmniejszając ścianę pomiaru liczbą 100, będzie:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & = y^3 + 300y^2 + 30000y + 1000000 \\ - 300x^2 & - 300y^2 - 60000y - 3000000 \\ + 30000x & + 30000y + 3000000 \\ - 271000 & - 271000. \end{array}$$

Summa:  $y^3 + 729000 = 0$

Gdzie, ponieważ rugując 2gi termin, zgi-  
nęła i 3ci, przeto pomiar sześciogranny za-  
trzymieł się w czyłty, dlatego pozostały termin  
tego ostatni z dwoma znakami położony, któ-  
rego ściana znajdzie się przez Przestr: 2. §.  
XXV, wyciągając ją osobno z  $v^3$ , a osobno  
z  $729000$ , będzie przez § V. i XIII.  $y = -90$ .  
Ale, że rugując 2gi tego pomiaru ter-  
min, zmniejszyła się ściana jego liczbą 100,  
a dla wyrugowanego z 2gim razem i 3ciego  
terminu nie przyszło użyć innych sposobów  
redukowania tegoż pomiaru, a tém samém  
powiększenia ściany zmniejszonej, więc ją  
teraz powiększyć należy tą samą liczbą, któ-  
rą przedtém była zmniejszona, będzie więc  
 $y = -90 + 100 = 10$  i t. d.

Zaga-

*Zagadnienie 4te.* Mając daną summę dwóch sześciogranów i przewyżkę boków czyli ścian, iak wynaleść same ściany?

*Rezolucya 1.* Niech będzie summa dwóch sześciogranów  $\equiv 2a$ , ściany niewiadome  $\equiv 2x$ , tych przewyżka wiadoma  $\equiv 2b$ , będzie ściana większa:  $x + b$ , mnieysza:  $x - b$ , sześciograny z tych ścian pojedynczo zrobione i zebrane w iedną sumnę dadzą pomiar sześciogranny:  $2x^3 + 6b^2x \equiv 2a$ .

Czyli przez § XVII.  $x^3 + 3b^2x \equiv a$ .

Czyli przez tenże §:  $x^3 + 3b^2x - a \equiv 0$ .

Daymy iuz: że  $a \equiv 14$ ,  $b \equiv 1$ , założywszy te ceny za litery, zamieni się ostatni pomiar w ten:  $x^3 + 3x - 14 \equiv 0$ , który zgadza się z formułą  $x^3 + px - q \equiv 0$ , zrównawszy więc iego terminy z téy terminami, będzie  $p \equiv 3$ ,  $q \equiv 14$ , a przez § XXV, wzięwszy czworogran 4 blisko większy od  $p \equiv 3$  i ten do wziętego dodawszy będzie  $4 + 3 \equiv 7$  przez ktore podzieliwszy  $-q \equiv -14$ , wiektoraz  $-2$  będzie ścianą wziętego czworogranu 4, a razem ścianą pomiaru szukaną, uieść będzie:  $x - 2 \equiv 0$ , czyli  $x \equiv 2$ . Więc podług warunków Zagadnienia ściana większa  $x + b \equiv 2 + 1 \equiv 3$ , mnieysza zaś  $x - b \equiv 2 - 1 \equiv 1$ , sześciogran i wsfzény:  $3 \times 3 \equiv 27$ , 2giény:  $1 \times 1 \times 1 \equiv 1$ , a summa sześciogranów  $2a \equiv 28$ . C. B. D. R.

*Rezolucya 2. krótsza przez § XXVI.* Mając zredukowany i do formuły obrocony pomiar

$$x^3 +$$

$x^3 + 3x - 14 = 0$ , szukam sześciogranu blisko mniejszego od 14, którym jest 8, i odciągam go od 14, a razem odciągam sześciogran ilkości niewiadoméy  $x^3$  od  $x^3$ , zostanie:  $3x - 6 = 0$ , czyli  $x = \frac{6}{3} = 2$ , iak wyżéy.

*Zagadnienie 5te.* Mając daną sumnę dwóch sześciogranów i prostokąt czyli rektanguł z ich ścian zrobiony, iak znaleźć ściany danych obydwóch sześciogranów?

*Rezolucya.* Niech będzie sześciogranów summa  $= 2a$ , prostokąt z ścian zrobiony  $= 2b$ , ściana jedna  $= x$ , druga  $= y$ , wywdę z warunków zagadnienia te dwa pomiary:

$$\begin{aligned} \text{1wszy: } x^3 + y^3 &= 2a, & 2b \\ 2gi: xy &= 2b, \text{ czyli dzieląc: } y = \frac{2b}{x}. \end{aligned}$$

Z których 2gi wynosząc do 3ciego stopnia, będzie przez § II:  $y^3 = \frac{8b^3}{x^3}$ ; tę zaś cenę zakładając za  $y^3$  w pomierze 1wszym, będzie:  $x^3 + \frac{8b^3}{x^3} = 2a$ ; gdzie gubiąc frakcyą czy-

li przez  $x^3$  mnożąc 1wszy i ostatni pomiaru termin, będzie:  $x^6 + 8b^3 = 2ax^3$ , czyli  $x^6 - 2ax^3 = -8b^3$ . Ten już pomiar lubo zdaie się być sześciostopniowym, w saméy rzeczy nie jest tylko czworogrannym naciągany przez § XVII. Wszakże założywszy w nim z

za  $x^3$

za  $x^3$ , zamieni się dorazu w ten czworogranny:  
 $z^2 \text{ --- } 2az \text{ --- } sb^3$ . Daymy już: że  $2a \text{ --- } 72$ ,  $2b \text{ --- } 8$ , toć  $b \text{ --- } 4$ ;  $b^3 \text{ --- } 64$ ,  $8b^3 \text{ --- } 512$ , więc zakładając liczby za litery, będzie pomiar:  $z^2 \text{ --- } 72z \text{ --- } 512$ , który redukując przez § XVIII. to jest: *naprzód dopełniając go przydatkiem do obydwóch części czworogranu zrobionego z połowy współczynnika terminu 2go*; będzie:

$$z^2 \text{ --- } 72z \text{ + } 1296 \text{ --- } 512 \text{ + } 1296.$$

Czyli:  $z^2 \text{ --- } 72z \text{ + } 1296 \text{ --- } 784$ .

*Powtóre*: Wyciągając ścianę czworograną z i wżęć części przez § VI. z 2gięć zaś przez § XI, będzie  $z \text{ --- } 36 \text{ --- } 28$  czyli:  $z \text{ --- } 28 \text{ + } 36 \text{ --- } 64$ . Lecz z założone było za  $x^3$ , będzie więc  $x \text{ --- } \sqrt[3]{z} \text{ --- } \sqrt[3]{64}$ , albo ścianę wyciągnąwszy przez § XIII.  $x \text{ --- } 4$ , a kiedy

$$x \text{ --- } 4, \text{ toć } y \text{ --- } \frac{2b}{x} \text{ --- } \frac{8}{4} \text{ --- } 2. \text{ C. B. D. R.}$$

*Zagadnienie 6ste*: Mając dwie linije proste, pierwszą z nich tak pociągnąć, żeby drugiey czworogran do czworogranu części pociągnięney równy czyli ten sam względ miał, co część pociągnięta do caley prostey.

*Rozolucya*. Niech będą dane linije proste  $b$  i  $a$ , pociągnąwszy linij  $b$ , część pociągnięta będzie  $\text{--- } x$ , więc cała prosta  $\text{--- } b \text{ + } x$ , azatem podług warunków zagadnienia pomiar wypadnie w proporcji Geometryczney:  $a^2. x^2 : : x. b \text{ + } x$ .

Czyli



Czyli przez Zadan: 4. Rozdz: 3. Części 1.  
 $x^3 = a^2b + a^2x$ .

Czyli przez § XVI:  $x^3 - a^2x - a^2b = 0$ .  
 Daymy iuż: że  $a = 2$ ,  $b = 12$ , założy-  
 wšy liczby za litery, pomiar zamieni się w ten:  
 $x^3 - 4x - 48 = 0$ ; a ten zredukowawšy  
 przez § XXV. albo XXVI, będzie:  $x = 4$ . Al-  
 bowiem redukując przez § XXV, biorę czwo-  
 rogran 16 więkšy od 4 współczynnika 2go  
 terminu, i odciągam 4 od 16, a przez resztę  
 12 dzielę — 48, wieloraz — 4 będąc ścianą  
 wziętego czworogranu, iest oraz ścianą pomia-  
 ru Źukaną, więc  $x - 4 = 0$ , czyli  $x = 4$ .

Redukując zaś przez § XXVI. pomiar tak  
 obrócony  $x^3 - 4x = 48$ , poniewaŹ w nim  
 Źeściogran niewiadoméy ilkoŹci  $x^3$  więkšy iest  
 od Źeściogranu wiadoméy 48, więc wziąwšy  
 Źeściogran 64 i odciągnąwšy go od 48, a  
 razem odciągnąwšy  $x^3$  od  $x^3$ , będzie:

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x = 48 \\ -x^3 \quad \quad -64 \\ \hline \quad \quad -4x = -16 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = \frac{16}{4} = 4 \end{array}$$

JuŹ ieŹeli  $x = 4$ , toć  $x + b = 4 + 12$   
 $= 16$ ; Więc iako:  $a^2 \cdot x^2 : : x \cdot b + x$ , tak  
 teŹ: 4. 16 : : 4. 12 + 4. C. B. D. R.

*Zagadnienie 7me.* WynaleŹ trzy liczby  
 Arytmetycznie równowŹględne czyli propor-  
 cyonalne, których przewyŹłka, *differentia*,  
 i miąŹzoŹć, *solidum*, są dane.

*RezoluŹya.* PrzewyŹłka trzech liczb wzmian-  
 kowanych niech będzie  $= d$ , miąŹzoŹć  $= m$ ,  
 liczby niewiadome 1wŹa  $= x$ , 2ga  $= x + d$ ,

$$3cia =$$

3cia  $\equiv x + 2d$ , gdyż Arytmetycznie mają być proporcjonalne ; miąższość zaś, mnożąc naprzód  $x$  przez  $x + d$ , potem produkt:  $x^2 + dx$  przez  $x + 2d$ , będzie:  $x^3 + 3x^2d + 2xd^2$ , azatém pomiar:

$$x^3 + 3x^2d + 2xd^2 \equiv m.$$

Rugując termin 2gi przez § XXII. czyli biorąc  $x \equiv y - d$  i cenę tę wyniesioną do jednychże z  $x$  stopniów zakładając za  $x$  w danym pomierze, będzie:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & \equiv y^3 - 3y^2d + 3yd^2 - d^3 \\ + 3x^2d & + 3y^2d - 6yd^2 + 3d^3 \\ + 2xd^2 & + 2yd^2 - 2d^3 \end{array}$$

---


$$\text{Summa: } y^3 \quad * \quad - yd^2 \quad * \equiv m.$$

Daymy już: że  $d \equiv 3$ ,  $m \equiv 28$ , założywszy te liczby za litery, będzie pomiar:  $y^3 - 9y \equiv 28$ , a ten łatwo się zredukuje przez § XXVI. Ponieważ bowiem  $y^3 > 28$ , biorąc więc 64 sześciogran większy od 28 i odcinając tamten od tego równie iako i  $y^3$  od  $y^3$ , a resztę redukując będzie:

$$\begin{array}{r} y^3 - 9y = 28 \\ - y^3 \quad - 64 \\ \hline - 9y = - 36 = y = \frac{36}{9} = 4. \end{array}$$

Lecz  $x \equiv y - d$ , toć  $x \equiv 4 - 3 \equiv 1$ ; gdy więc z liczb Arytmetycznie proporcjonalnych iwsza iest 1, druga 4, toć przewyżka iest 3, azatém 3cia z tychże liczb będzie 7. Wszakże  $1 \times 4 \times 7 \equiv 28$  C. B. D. R.

Za-

*Zagadnienie 8me.* Liczbę 10 podzielić na 4 części Geometrycznie proporcjonalne tak, żeby mnożąc 1wszą przez 8, 2gą przez 4, 3cią przez 3, 4tą przez 1, Summa tych produktów uczyniła 16.

*Rezolucya.* Niech będzie liczby daney część iedna  $= x$ , proporcyi zaś Geometryczney mianownik  $= y$ , będzie z 1wszego warunku zagadnienia pomiar:  $x + xy + xy^2 + xy^3 = 10$ ,

Z 2go zaś warunku będzie 2gi pomiar:  $8x + 4xy + 3xy^2 + xy^3 = 16$ .

W obudwóch wziąwszy cenę ilkości  $x$ , bę-

dzie w 1wszym:  $x = \frac{10}{1 + y + y^2 + y^3}$ , w 2gim:

$x = \frac{16}{8 + 4y + 3y^2 + y^3}$ ; a te ceny przez §XVII.

zrównawszy z sobą czyli ułożywszy w ieden pomiar, będzie:

$$\frac{10}{1 + y + y^2 + y^3} = \frac{16}{8 + 4y + 3y^2 + y^3}$$

Gubiąc frakcye, to jest: przez mianownika 1wszého mnożąc licznika 2gię i naodwrot przez 2gię mianownika mnożąc licznika 1wszého

będzie naprzód:  $10 = \frac{16 + 16y + 16y^2 + 16y^3}{8 + 4y + 3y^2 + y^3}$

*Powtóre:*  $80 + 40y + 30y^2 + 10y^3 = 16 + 16y + 16y^2 + 16y^3$

Czyli

Czyl i przez § XVI.  $16y^3 \star 16y^2 \star 16y \star$   
 $16 - 10y^3 - 30y^2 - 40y - 80 = 0$ . Reduku-  
 jąc zaś terminy podobne, zostanie:  $6y^3 - 14y^2$   
 $- 24y - 64 = 0$ . Dzieląc przez 6, będzie:  
 $y^3 - \frac{14}{3}y^2 - 4y - \frac{64}{3} = 0$ , czyli:  $y^3 - \frac{7}{3}y^2 -$   
 $4y - \frac{32}{3} = 0$ .

Gubiąc frakcye przez § XXIII. sposobem  
 2gim, będzie:

$$\begin{array}{ccccccc} y^3 & - & \frac{7}{3}y^2 & - & 4y & - & \frac{32}{3} = 0 \\ 1. & & 3. & & 9. & & 27. \end{array}$$

---


$$y^3 - 7y^2 - 36y - 288 = 0$$

A ten pomiar ponieważ da się podzielić bez  
 reszty przez  $y - 12$  (§ XVII p. V.) wypa-  
 dnie z podziału takiego pomiar czworogranny:  
 $y^2 + 5y + 24 = 0$ , więc 12 z przeciwnym  
 znakiem jest ścianą pomiaru sześciogrannego  
 przez § XX. p. V. Lecz że dla zgubienia fra-  
 kcyi ściana tegoż pomiaru rozmnożona była  
 przez progresyją Geometryczną mającą za mia-  
 nownika 3, zaczęm i ściana wynaleziona 12  
 jest we troje więkksza od ściany prawdziwéy te-  
 goż pomiaru, przeto podzielić ją należy przez  
 3, wieloraz da ścianę dotąd szukaną  $= 4$ ,  
 którą założywszy za  $x$  w cenie iego który-  
 kolwiek ze dwóch wyżej położonych, wypa-  
 dnie część iwszą liczby 10 zapytana, gdyż

$$\text{będzie: Jak w iwszém: } x = \frac{10}{1 \star 4 \star 16 \star 64.}$$

$$= \frac{10}{13} = \frac{2}{17}.$$

Tak

Tak i w zgięty  $x = \frac{\quad}{\quad}$   
 $8 * 16 * 48 * 64$

$$= \frac{16}{17} = \frac{2}{17}$$

Część tedy 1wsza rzeczonéj liczby  $= \frac{2}{17}$ ,  
 więc 2ga  $= \frac{8}{17}$ , 3cia zaś  $= \frac{32}{17}$ , nakoniec  
 4ta  $= \frac{128}{17}$ , gdyż  $\frac{2}{17} \times 4 = \frac{8}{17}$ ,  $\frac{8}{17} \times 4 =$   
 $\frac{32}{17}$ ,  $\frac{32}{17} \times 4 = \frac{128}{17}$ , a tych części summa  $\frac{170}{17} = 10$ .

Gdyby zaś każda z tych części rozmnożona  
 była przez liczby warowane, summa produ-  
 któw z mnożenia tego wypadłych byłaby  $=$   
 16, gdyżby było:  $\frac{2}{17} \times 8 = \frac{16}{17}$ ;  $\frac{8}{17} \times 4 =$   
 $\frac{32}{17}$ ;  $\frac{32}{17} \times 3 = \frac{96}{17}$ ;  $\frac{128}{17} \times 1 = \frac{128}{17}$ ; a summa:  
 $\frac{272}{17} = 16$ . C. B. D. R.

## ROZDZIAŁ VII.

*O Rachunku ściennym czyli Radykalnym.*

**Z** tego, co się dotąd przekładało, można  
 dochodzić, co to jest zarachunek i do cze-  
 go przydatny. Ale jego zdatność okaże się le-  
 piéj w Rozdziale ostatnim, dla której przed  
 nim się kładzie, bo dla innych bezpiecznie  
 mógłby być opuszczony; dlaczego treść  
 tylko jego i przednieysze działania iak nay-  
 krócéj będą tu dotknięte.

§ XXVII. *Rachunek ten bawi się około stopniów  
 niedoskonałych, o których wiedzieć potrzeba:*

1. Ze niedoskonałym stopniem, *potentia im-  
 perfecta, surda, irrationalis*, nazywa się il-  
 kość



kość, z której ściany całe wyciągnąć nie można, i od znaku też ścianę wyrażającego nazywa się ściennym czyli radykalnym, a wyraża się jednym z tych sposobów:  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt[3]{a}$ ,  $\sqrt[3]{a-b}$ ,  $\sqrt[4]{(a-b)}$ ; gdzie znak każdy ścienny albo wyraźnego ma wykładnika 3, 4 i t. d. albo domniemanego 2, iako  $\sqrt{a}$ , które to wykładniki w porównywaniu ilkości ściennych jednych z drugimi nazywają się mianownikami ich, o czym w § następującym.

II. Liczba lub litera przed znakiem ściennym położona nazywa się przedznaczną, *extra signum*, iaką jest 2 w ilkości ściennéy:  $2\sqrt{3}$ ,

a w ilkości:  $a\sqrt[4]{b}$ , a gdzie wyraźny nie ma, tam domniemaną będzie 1. Ilkość zaś pod tymże znakiem położona, nazywa się podznaczną, *sub signo*, iako 3 i b w danych przykładach. Zeby przedznaczną ilkość położyć się mogła pod znakiem, wynieść się powinna do tego stopnia, który wyrażony jest przez wykładnika ściennego, i rozmnożyć się przez

ilkość podznaczną, tak np:  $2\sqrt[3]{3}$ , będzie:

$2 \times 2 \times 2 = 8 \times 3 = \sqrt[3]{24}$ . Ilkość zaś podznaczną jednego z znakiem ściennym wykładnika mająca nie może się inaczej przed znakiem położyć tylko wyciągnawszy z niej ścianę; ta się położy przed znakiem ściennym, a

rezta zostanie pod nim; tak  $\sqrt[3]{ab^3}$  będzie:

$b\sqrt[3]{a}$ , i t. d.

III.

III. Ilkość odciążna położona pod znakiem ściennym, którego wykładnikiem jest liczba parzysta np: ta:  $\sqrt[2]{\quad}$  — a, lub ta:  $\sqrt[4]{\quad}$  — a, nazywa się imaginaryyną czyli niepodobną, gdyż niepodobna jest z tych stopniów ścianę wyciągnąć, iako się namieniło w Przestr. 2. § XV.

IV. Dwie ilkości ściennie nazywają się współmiernemi czyli mogącemi się pomierzyć, *commensurables*, które pod iednakiem znakiem ściennym mają też samą literę albo liczbę, i przedznaczniemi się tylko różnią, takie są:  $3\sqrt[3]{5}$  i  $2\sqrt[3]{5}$ ,  $a\sqrt[3]{b}$ , i  $c\sqrt[3]{b}$  i t. d.

§ XXVIII. Jak ściennie ilkości obrócić do iednego mianownika?

Ponieważ tych ilkości ani dodawać, ani odciążać, ani nawet mnożyć i dzielić nie można, jeśli tego samego mianownika czyli wykładnika ściany nie mają, przeto, gdy są dane z różnym mianownikiem, do iednego ie obrócić trzeba, zostawując ilkości przedznaczne, iak były, a te tylko, które są pod znakiem, redukując iednym ze dwóch sposobów:

I. Mając np:  $\sqrt[3]{a}$  i  $\sqrt[3]{b}$ , czyli (przez Wykład III. Rozdz. I.)  $a^{\frac{1}{3}}$  i  $b^{\frac{1}{3}}$ ; trzeba *naprzód*: wykładników tych słomanych  $\frac{1}{3}$  i  $\frac{1}{3}$  obrócić do iednego mianownika podług Reguł Arytmet: będzie:  $\frac{2}{3}$  i  $\frac{2}{3}$ ; *potwóre*: wynieść ilkość a do 3go, b zaś do 2go stopnia, iak te nowe wykładniki same pokazują, toż wyniesione  $a^3$ ,  $b^2$  pod znakiem ściennym położyć, a w znaku samym

mym iednegoż ich mianownika 6, będą ilko-  
ści rzeczzone obrócone do iednego mianownika

$$\sqrt[6]{a^3} \text{ i } \sqrt[6]{b^2}$$

II. Jeżeli wykładnik iednéy ściany bez re-  
szty dzieli 2go, ilko ci ściennie króćcy się o-  
brócą do iednego mianownika np: mając:

$\sqrt[2]{c}$  i  $\sqrt[6]{a}$ , ponieważ 6 przez 2 spełna się dzieli,  
więc podzieliwszy, wieloraz 3 pokazuje napřed:  
że i kóść pod 1wszym znakiem położona, wy-  
nieść się powinna do 3ciego stopnia  $c^3$ , potém: że  
wykładnik iéy 2 przez róż 3 rozmnożony bę-  
dzie wykładnikiem czyli mianownikiem ws ol-  
nym obojéy ściany, azatém będzie:  $\sqrt[6]{c^3} \text{ i } \sqrt[6]{a}$   
i t. d.

§ XXIX. *Ilkości ściennie iak się redukują,  
czyli na prostsze obracają*

Uważać trzeba: co za mnożyciele są ilko-  
ści pod znakiem ściennym położonych, z tych  
będzieli który wyniesiony do tego samego sto-  
pnia, który iest w znaku ściennym, wycią-  
gnioną z niego ścianę położyć przed znakiem,  
a resztę zostawić na swoiém miejscu. Niech

będzie np: ilkość  $\sqrt[n]{a^m b^n}$ , którey ilkości pod-  
znaczne  $a^m$ ,  $b^n$  są dwa mnożyciele, *factores*,  
z których rozmnożenia wypadł produkt  $a^m \cdot b^n$ ;  
z tych zgi  $b^n$  pojedynczo wzięty iednegoż ma  
wykładnika z znakiem ściennym; wyciągną-  
wizy

wfzy więc z  $b^n$  ścianę czworograną  $b$  i przed znakiem położy wfzy, a resztę to iest  $a^m$  zostawiwfzy pod znakiem, będzie:  $b \sqrt[n]{a^m}$  ilkość zredukowana czyli na prostszą obrócona.

Niech będzie ieszcze ilkość ścienna w liczbie  $np$ :  $\sqrt[8]{24}$ , którzy mnożyciele są 8 i 3, a z tych i wfzy iest tym samym stopniem, który wyraża  $\sqrt[3]{}$ ; wyciągnąwfzy więc z 8 ścianę sześciograną 2 i przed znakiem położywfzy, a zgiego mnożyciela 3 zostawiwfzy pod znakiem, będzie:  $2 \sqrt[3]{}$  na prostszą obrócona, ale téż saméy ceny, co i i wfza *i t. d.*

*Przeftroga.* Mnożycielów wzmiankowanych nie trudno znaleźć, dzieląc liczbę podznaną przez 2, 3, 4 *i t. d.* Który bowiem dzielnik rzezoną liczbę bez reszty podzieli, ten będzie iednym mnożycielem, a wieloraz drugim. Lecz którzy ilkości znaleźć nie można mnożycielów takich, żeby ieden z nich wyniesiony był do stopnia przez znak ścienny wyrażonego; ta nie może się na prostszą obrócić. Co żeby tym łatwiey poznać, zrobić trzeba z ilkości podznaných frakcyą, ta zredukowana pokaże mnożycielów *np*: mając  $\sqrt[8]{}$  i  $\sqrt[18]{}$ , a 8 i 18 obracając na  $\frac{8}{18}$ , czyli na  $\frac{4}{9}$ ; będzie 4 iednym, a 9 drugim mnożycielem, a obadwa czworogranne, iako oczywista.

§ XXX. Dodawanie i odciąganie ilkości ściennych.

Obróciwszy ilkości ścienne na proste przez §. poprzedz: uważać należy: czy są współmierne, czy nie.

I. Jeżeli są współmierne czyli też samą ilkość podznaczną mające, ta się na swojem miewscu zoitawuje, a przedznaczną dodać się lub odciąga sposobem zwyczajnym, i summa lub reszta kładzie się znowu przed znakiem ściennym np: mając  $\sqrt{50}$  i  $\sqrt{18}$ , i redukując na proste, będą:  $5\sqrt{2}$  i  $3\sqrt{2}$ , dodając  $5+3$ , będzie summa  $= 8\sqrt{2}$ , odciągając  $5-3$ , będzie reszta  $= 2\sqrt{2}$ .

II. Jeżeli zaś nie są współmierne, dodanie ich i odciągnięcie zwyczajnymi znakami  $+$  i  $-$  wyraża się. Dwa te przepisy służą składanym nawet ilkościom ściennym. Co się daje widzieć w tym przykładzie, w którym terminy ścienne dodają się jednoznaczne, a różnoznaczne odciągają.

$$\begin{array}{r}
 3\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{6}. \\
 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 8\sqrt{5} + \sqrt{6}. \\
 \hline
 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{6}.
 \end{array}$$

§ XXXI. Mnożenie i dzielenie tychże ilkości.

I. Obrócone do jednego mianownika przez § XXVIII. ilkości ścienne ośobno przedznaczone a ośobno podznaczone mnożą się za wzór pospolitych, a produkta piszą się z tymże samym znakiem ściennym tak, iak mnożyciele  
były



były napisane np: mnożąc  $5\sqrt{3}$  przez  $4\sqrt{2}$ ,  
 będzie:  $5 \times 4 = 20$ ,  $3 \times 2 = 6$ , azatem  
 produkt  $= 20\sqrt{6}$ : podobnym sposobem mno-  
 żąc  $m\sqrt[3]{a}$  przez  $n\sqrt[3]{a}$ , będzie:  $mn\sqrt[3]{a^2}$ . Kie-  
 dy zaś trafi się ilkość ścienną mnożyć przez  
 doskonałą, trzeba tę wprzód do iednego z tam-  
 tą mianownika obrocić, a dopiero mnożyć,  
 iak wyżej. Zgoła byle iednego mianownika  
 miały rzeczone ilkości czy pojedyncze, czy  
 składane z samych ściennych lub częścią z ścien-  
 nych, częścią doskonałych terminów; do mno-  
 żenia onych dosyć na tym przepisie: aby się  
 zosobna mnożyły doskonałe przez doskonałe,  
 a ściennie przez sobie podobne, pamiętając o  
 regułach w Części I. na znaki  $+$  i  $-$  da-  
 nych, dla których terminy podobne pśować się  
 zwykły, a w terminach produktu redukcya  
 czyniąc, gdzie można przez §. XXIX.

II. Co się tycze dzielenia, uważać trzeba  
 ilkości ściennie czy są współmierne, czy nie.  
 Sąli współmierne, podzieliwszy przedznacne,  
 wieloraz da ilkość doskonałą, tak np:  $6\sqrt{3}$   
 dzieląc przez  $3\sqrt{3}$ , wieloraz będzie  $= 2$ . Al-  
 bowiem dwie te przedznacne ilkości 6 i 3  
 kładąc pod znakiem przez § XXVI. p. II. bę-  
 dzie iwisza:  $6\sqrt{3} = \sqrt{108}$ , 2ga:  $3\sqrt{3} =$   
 $\sqrt{27}$ ; dzieląc zaś  $\sqrt{108}$  przez  $\sqrt{27}$ , czyli  
 $\frac{108}{27}$ , wieloraz będzie:  $\sqrt{4} = 2$ . Jeżeli zaś  
 nie są współmierne, tedy osobno dzielą się  
 przedznacne, osobno podznacne, np:  $6\sqrt{ab}$

L2 , dzieląc

dzieląc przez  $2\sqrt{a}$ , będzie:  $\frac{s}{2}$  i  $\frac{ab}{2} = 3\sqrt{b}$ .

Naostatek: chcąc dzielić ilkość ścienną przez doskonałą lub przeciwnie, obrócić wprzód trzeba doskonałą do iednego mianownika z ścienną, dopiero dzielić podług danych przepisów np:

chcąc podzielić  $a$  przez  $\sqrt[3]{ab}$ , wynoszę  $a$  do 3go stopnia, będzie:  $\sqrt[3]{a^3}$ , toż dzielię  $a^3$  przez  $ab$ , wypadnie wieloraz  $= \frac{aa}{b}$ .

*Okazanie ogólnego sposobu mnożenia i dzielenia.*

I. Mnożąc ilkość ścienną np:  $\sqrt{3}$  przez  $\sqrt{2}$ , produkt musi być  $= \sqrt{6}$ . Albowiem z istoty mnożenia i tak się ma do liczby mnożący, iak mnożna do produktu, który nazywam  $p$ , to iest: w przykładzie danym:  $1.\sqrt{2} :: \sqrt{3}.p$ . taż proporcya iest i między czworogramami tych samych terminów to iest:  $1.2 :: 3.p^2$ . A że  $1.2 :: 3.6$ ; więc iak  $p^2 = 6$ , tak i  $p = \sqrt{6}$ . Dzielać zaś np:  $\sqrt{15}$  przez  $\sqrt{3}$ , wielorazem być musi  $\sqrt{5}$ ; gdyż z istoty dzielenia tak się ma dzielnik do liczby podzielny, iak i do wieloraza, który niech będzie  $= q$ , co także i czworogramom służy, to iest: iako  $\sqrt{3}.\sqrt{15} :: 1.q$ . tak:  $3.15 :: 1.q^2$ . A że  $3.15 :: 1.5$ . więc iak  $q^2 = 5$ , tak i  $q = \sqrt{5}$ . C.B.D.O.

§. XXXII. *Wynieść ilkość ścienną do danego stopnia.*

I. Ilkość ścienna mająca się wynieść do danego stopnia albo iest podznaczna, albo częścią

ścią przedznaczną częścią podznaczną ; jeżeli tylko podznaczną , sama się do stopnia danego wynosi bez odmiany znaku ściennego i jego wykładnika np:  $\sqrt[3]{a}$  wyniesiona do 3go stopnia będzie  $\sqrt[3]{a^3}$ , jeżeli zaś częścią przedznaczną, częścią podznaczną, tak ta iako i tamta do danego stopnia wynieść się powinna np:  $a\sqrt[3]{b}$  wyniesiona do 2go stopnia będzie  $a^2\sqrt[3]{b^2}$ . II. Co się tycze ilkości ściennych składanych, te się wynoszą do wyższych stopniów tak, jak doskonałe, zachowując Przepisy na mnożenie dane w §. poprzedzającym i t. d.

§ XXXIII. Wyciągnąć ścianę czworogranną z ilkości ściennéy.

I. Wyciągać ścianę z ilkości ściennych wyższą nad 2gi i 3ci stopień nie zdarza się z przy czyny : że ilkości wyższe nad rzeczzone stopnie w redukcji pomiarów do 2go pospolicie albo do 3go stopnia obracają się, przeto z tych tylko stopniów ścian wyciągania potrzeba czasem wynika. Co się więc tycze czworogrannéy, mając ją wyciągnąć np: z  $\sqrt{a}$ , ponieważ przez § I.  $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ , wykładnika tego  $\frac{1}{2}$ , podzieliwszy przez wykładnika stopnia danego także  $\frac{1}{2}$ , wie loraz da ścianę czworogranną:  $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$  ; azatém, ponieważ ułamki dzielą się przez mnożenie, do wyciągnięcia ściany takiéy dosyć być

będzie przez wykładnika ściany daney rozmnożyć wykładnika ilkości ściennéy.

II. Mając wyciągać też ścianę z ilkości dwukrotnéy  $ap$ : z téy:  $7 + \sqrt{48}$ , odciąga się naprzód 48 od 49 to jest; od czworogranu 1-wszego terminu 7, potém z przewyżki ich  $= 1$  wyciąga się ściana czworogranna  $= 1$ , a ta dodana do terminu doskonałego 7 uczyni 8, odciągniona od niego, uczyni 6; któryto summy i przewyżki połowa to jest: 4 i 3 będzie ścianą czworograną daney dwukrotnéy ilkości  $= \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$ . Podobnie wyciągając też ścianę z ilkości dwukrotnéy:  $a + b - 2\sqrt{ab}$ , odciąga się od czworogranu 1-wszego terminu  $a + b$ , to jest: od  $a^2 + 2ab + b^2$  czworogran terminu 2go  $= 2\sqrt{ab}$  to jest:  $4ab$  przez § XXVII. p. II; będzie przewyszka:  $a^2 - 2ab + b^2$ , który ściana czworogranna jest:  $a - b$ , tę dodawszy do terminu doskonałego  $a + b$ , będzie summa  $2a$ , odeiagnawszy od niego, będzie reszta  $2b$ ; a połowa téy summy i reszty będzie ścianą szukaną  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ .

*Okazanie.* Biorąc za przykład dopiero znalezioną ścianę  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  i wynosząc ją do 2go stopnia przez § przedostatni, będzie:  $a + b - 2\sqrt{ab}$  ilkość dwukrotna, która dana była, w której dają się widzieć dwa terminy doskonały i ścienny, 1wszy zawierający sumnę ścian  $a + b$ , 2gi dwoisty produkt tychże ścian  $2\sqrt{ab}$ . Odciągnawszy więc czworogran

2go terminu  $\equiv 4ab$  od czworogranu 1wszego terminu doskonałego  $\equiv a^2 - 2ab + b^2$ , reszta  $\equiv a^2 - 2ab + b^2$  będzie także czworogranem ściany  $a - b$ , więc przewyżką tych dwóch czworogranów jest  $a - b$ , która dodana do ich summy  $a + b$  uczyni za to jest: dwójkę czworogranu ściany  $\sqrt{a}$ , odciągnięta zaś od téż summy uczyni  $2b$  czyli dwójkę czworogranu zgięty ściany  $\sqrt{b}$ , azatém połowy ich  $a$  i  $b$  dają terminy ściany szukanej  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  C. B. D. O. Skąd się pokazuje: iż do wyciągnięcia ściany czworogranowej z dwukrotności ilkości ściennych trzech warunków potrzeba I. żeby rzeczona ilkość nie z łamanych terminów ściennych składała się, ale żeby jeden z nich był doskonały, II. żeby termin doskonały azatém i czworogran jego był większy od ściennego, iżby się ten od tamtego mógł odciągnąć, III. żeby przewyżka czworogranów zrobionych z terminów doskonałego i ściennego była także czworogranem, inaczej z daney ilkości nie wyciągnie się ściana czworogranna.

§ XXXIV. *Wyciągnąć ścianę sześciograną z ilkości ściennych trzeciostopniowej.*

Redukcyę pomiarów sześciogrannych i innych wyższostopniowych na sześciogrannę obrotnych kończą się pospolicie na wyciąganiu tym lub owym sposobem ściany, ale nie zawsze sześciogranny pomiar zredukowany do  
jedeny



jedney niewiadomę ilkości ma w drugiey części swojej wiadome zupełnie zredukować. Bywa tam czasem jeden, a czasem i drugi termin ścienny, który dalższego ciągnięcia ściany potrzebuje. Obaczmy więc, iak z niemi postąpić.

1. Weźmy np: zredukowanego iakiego pomiaru sześciogrannego część  $2g_3 = 20 + \sqrt{392}$ , gdzie dwa są terminy, jeden doskonały to jest: 20, drugi ścienny to jest  $\sqrt{392}$ , który obrócić trzeba na prośły, czyli wyciągnąć z niego, co jest doskonałego i przed znakiem położyć, resztę, jeżeli będzie iaka, zostawując pod znakiem. Co się tym sposobem dzieła: Mnożyciele liczby ścienny 392 między innemi są 2 i 196, (gdyż podzieliwszy 392 przez 2, wieloraz jest 196) liczba zaś ta 196 jest czworogranna, której ściana jest  $= 14$ , azatém przez § XXIX:  $\sqrt{392} = 14\sqrt{2}$ . Będzie więc dana ilkość dwukrotna:  $20 + \sqrt{392} = 20 + 14\sqrt{2}$ , z której wyciągając ścianę sześciogranną, dajmy: część doskonałą  $20 = a$ , niedoskonałą  $14\sqrt{2} = m\sqrt{c}$ , będzie cała ściana  $= a + m\sqrt{c}$ , a sześciogram z nię uczyniony przez § XXXII. p. II. będzie:  $a^3 + 3a^2m\sqrt{c} + 3am^2c + m^3c\sqrt{c}$ , którego część doskonała jest:  $a^3 + 3am^2c$ , niedoskonała zaś  $3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c}$ . Ze zaś  $\sqrt{c} = \sqrt{2}$ , obróciwszy na lewą, będzie:  $3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c} = 3a^2m\sqrt{2} + m^32\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$ , czyli część

ta

ra niedoskonała literami wyrażona równa sobie samey liczbami wyrażonéy. Daymy już: że  $m = 1$ , i przez  $\sqrt{2}$  podzielmy:  $3a^2m\sqrt{2} + m^32\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$ , będzie:  $3a^2 + 2 = 14$ , czyli:  $3a^2 = 14 - 2 = 12$ , czyli:  $a^2 = \frac{12}{3} = 4$ , czyli nakoniec, wyciągnąwszy ścianę czworograną:  $a = 2$ , a tę cenę założywszy w części pomiaru doskonałéy za  $a$ , będzie:  $a^3 + 3am^2c = 8 + 12 = 20$ . Co się dobrze zgadza z przedsięwziętym przykładem, którego część doskonała  $= 20$ , a że cała jego ściana wyżéy należona  $= a + m\sqrt{c}$ , a zaś  $= 2$ ,  $m = 1$ ,  $\sqrt{c} = \sqrt{2}$ , więc ściana  $= 2 + 1\sqrt{2}$ , czyli:  $2 + \sqrt{2}$ . II. Niech będą w zredukowanym pomierze dwa terminy ściennie:  $\sqrt{243} + \sqrt{242}$ , które redukując przez § XXIX, będzie iwszy:  $9\sqrt{3}$ , gdyż z mnożycielów liczby 243 jeden być może 3 niedoskonały i dla tego pod znakiem ściennym położony, drugi 81 doskonały, który jest czworogranem, dlatego ściana jego 9 położona przed znakiem, drugi zaś będzie:  $11\sqrt{2}$ , gdyż z mnożycielów liczby 242 jeden 2 niedoskonały, drugi 121 czworogranny, którego ściana 11. Dla ułatwienia dalszéy redukcji założywszy litery za liczby, będzie:  $9\sqrt{3} = m\sqrt{c}$ ,  $11\sqrt{2} = n\sqrt{d}$ , a zatem cała ściana  $= m\sqrt{c} + n\sqrt{d}$ , a sześciogran iéy przez § poprzedzający będzie:

$$m^3c\sqrt{c} + 3m^2nc\sqrt{d} + 3mn^2d\sqrt{c} + n^3d\sqrt{d}.$$

A że  $m\sqrt{c} = 9\sqrt{3}$ , będzie więc część iedna sześciogranu tego  $m^3c\sqrt{c} + 3mn^2d\sqrt{c} = 3m^3\sqrt{3} + 6mn^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ .

Daymy już, że  $m = 1$  i podzielmy tę część przez  $\sqrt{3}$  będzie:  $3 + 6n^2 = 9$ , czyli:  $6n^2 = 9 - 3 = 6$ , czyli:  $n^2 = \frac{6}{6} = 1$ , czyli na-ostatek wyciągnąwszy ścianę:  $n = 1$ , a tę ce-nę założmy za  $n$  w zgięty części, będzie:  $3m^2nc\sqrt{d} + n^3d\sqrt{d} = 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$ . Co się dobrze zgadza z założeniem, azatém ściana wyciągniona:  $m\sqrt{c} + n\sqrt{d} = 1\sqrt{3} + 1\sqrt{2}$ , czyli  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  i t. d.

## R O Z D Z I A Ł VIII.

### O Pomiarach Czwartostopniowych.

§. XXXV. *Jak się redukują Pomiany dwu-czworogrannne czyli czwartostopniowe?*

Następujące zachowując Przepisy:

*Przepis 1.* Uważać dobrze potrzeba nay-pierwéy: czy pomiar z warunków zagadnienia wypadły iest prawdziwie czwartostopniowy, czy nie raczéy czworogranny naciągany. Po-znać to można iednym z tych sposobów: 1mśzy iest w § XVIII. opisaný, 2gi: probując: czy się z niego nie da wyciągnąć ściana czworo-granna, a ta byłaby pomiarem także czworo-grannym,

grannym, czego wzór będzie w Rezolucyi Zagadn: 1 i 2. niżej, 3ci: rezolwując pomiar czwartostopniowy na dwa Czworogranne, czego wizerunek iafny da się w Rezolucyi zagadnienia 3ciego.

*Przepis 2.* Jeżeli zaś żadnym z wytkniętych w Przep: 1. sposobów pomiar czwartostopniowy nie da się obrócić na czworogranny, trzeba zacząć redukcją jego od zgubienia frakcyy, jeżeli są iakie, i od wyrugowania z niego terminu 2go; w czym oboygu trudności nie ma, zachowując to, co się w § XXIII. i XXIV. przepisało. Potém obracać pomiar czwartostopniowy na sześciogranny, co dłuższy roboty wyciąga, do której trzeba mieć formułę ogólną przygotowaną, która się tak sporządza: wziąwszy pomiar ogólny wszelkie Czwartostopniowe bez 2go terminu wyrażający:  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ , obracam na sześciogranny ogólny, za któregooby pomocą inne szczególne czwartostopniowe mogły się redukować, rozbijając go na dwa czworogranne, które składającemi odtąd nazywać będę, to jest: na  $x^2 + yx + f = 0$ , i na  $x^2 - yx + g = 0$ ; też innożę jeden przcz 2gi, wypadnie inny pomiar wziętemu równy:

$$\begin{aligned} x^4 + &+ fx^2 - fyx + fg \\ &+ gx^2 + gyx \\ &- y^2x^2 \end{aligned} = 0.$$

Gdzie termin 2gi dla przeciwnych znaków zgubiony. Porównywając iuż współczynniki termi-

terminów tego pomiaru z współczynnikami  
wziętego na formułę, będzie I.  $f + g = y^2$   
 $= p$ , II.  $gy - fy = q$ , III.  $fg = r$ , a  
z 1wżych dwóch pomia-ów robiąc inny, w któ-  
rymby iedna tylko niewiadoma była to jest ra,  
która w obydwóch składających jest współczyn-  
nikiem terminu 2go, iaka tu jest ilkość  $y$ ;  
naprzód: w 1wżym przeniośłszy  $-y^2$  do 2-  
gięcy części, mnożę przez  $y$  wżyskie terminy,  
będzie:  $fy + gy = py + y^3$ , w 2gim zaś  
mam:  $gy - fy = q$ , więc gdy te obwdwa  
dodam, będzie summa:  $2gy = py + y^3 + q$ .  
gdy ie odciagnę, będzie reszta:  $2fy = py + y^3$   
 $- q$ . *Powtore*: z tej summy biorę cenę ilkości  
 $g$ , a z reszty cenę  $f$ , będzie 1wża:  $g =$   
 $\frac{py + y^3 + q}{2y}$ ,  $f = \frac{py + y^3 - q}{2y}$ ,

czyli mnożąc te pomiary ieden przez 2gi; bę-  
dzie:  $fg = \frac{py + y^3 - q}{2y} \times \frac{py + y^3 + q}{2y} =$   
 $\frac{p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2}{4y^2}$ ; gubiąc zaś frakcyą

czyli mnożąc 1wżą część pomiaru przez  $4y^2$ ,  
będzie:  $4fgy^2 = p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$ .  
*Potrzenie*: z porownania współczynników wy-  
żey uczynionego oprócz tych dwóch wypadł  
był i 3ci pomiar:  $fg = r$ , którego 2gą część  
rozmnożywższy przez  $4y^2$ , będzie:  $fg = 4ry^2$ ,  
a tę cenę założywższy za  $fg$  w ostatnim pomie-  
rze, będą wżyskie trzy owe pomiary w ten



ieden zbite:  $4ry^2 = p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$ ;  
 czyli ułożywszy terminy porządkie przez §.  
 XVI. będzie  $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 -$   
 $q^2 = 0$  pomiar na pozór sześciostopniowy,  
 w saméy rzeczy sześciogranny naciągany, gdyż  
 wszystkie wykładniki ilkości niewiadomych po-  
 dzielne są przez 2, iako się namieniło w §.  
 XVIII. Ten tedy pomiar użyty być może za  
 formułę ogólną do redukowania czwartosto-  
 pniowych szczególnych na sześciogranny po-  
 dług Przep: następującego.

*Przepis 3.* Mając dany szczególny iaki  
 pomiar czwartostopniowy łatwo się obróci na  
 sześciogranny naciągany za pomocą formuły  
 dopiero zrobionéy, zrównawszy tamtego współ-  
 czynniki z téy terminami  $p, q, r$ , i iedne za  
 2gie założywszy, a tak obrócony ieszcze śa-  
 twiéy obróci się na prosty na wzór innych sze-  
 ściogrannych. Co przykład objaśni. Niech  
 będzie np:  $y^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$ , bę-  
 dzie:  $p = -17$ ,  $q = -20$ ,  $r = -6$ ,  
 które to ceny założywszy za  $p, q, r$  w rzecz-  
 néy formule; wypadnie:  $y^6 - 34y^4 + 313y^2$   
 $- 400 = 0$ , a ten pomiar, ponieważ jest  
 naciągany, zredukuje się naprzód na sze-  
 ściogranny przez § XVII. p. II. założywszy  $z$   
 za  $y^2$  i będzie:  $z^3 - 34z^2 + 313z -$   
 $400 = 0$ , potem ten sam (wyrugowawszy  $z$   
 niego termin 2gi przez § XXII.) zredukuje się  
 na prosty temiż sposobami, co inne sześciogran-  
 ne przez § XXV lub XXVI.

*Prze-*

*Przepis 4.* Jeżeli pomiar czwartostopniowy jest czyſty, taki jest ten:  $x^4 = q$ , albo  $x^4 = -q$ , wyciąga ſię naprzód ſciana czworogranna z iwlżey iego części, będzie:  $x^2 = \sqrt{q}$ , albo  $x^2 = \sqrt{-q}$ , potem z obydwóch, będzie  $x = \sqrt{\sqrt{q}}$ , albo  $x = \sqrt{\sqrt{-q}}$ . Niech będzie np:  $x^4 = 50$ , będzie:  $x^2 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$  przez § XXIX. a za powtórniem ſciany wyciągnięciem będzie:  $x = \sqrt{5\sqrt{2}}$  i t. d.

### Przykłady pomiarów czwartostopniowych.

*Zagadnienie inſze* Daną liczbę tak na dwie części podzielić, żeby części tych czworogranny ieden przez drugiego rozmnożywszy, wypadła w produkcie liczba innéy danéy równa.

*Rezolucya.* Niech będzie liczba dana podzielna  $= 2a$ , przewyſzka części  $= 2x$ , będzie część więkſza  $= a + x$ , mnieyſza  $= a - x$ ; inna liczba produktowi czworogranów równa  $= c$ , azatém pomiar z warunków Za-

gadnienia wypadnie:  $a + x \times a - x = c$ ,  
czyli:  $x^4 - 2a^2x^2 + a^4 = c$ . Chcąc ſkrócić pomiaru tego redukcją, niech będzie  $2a = 14$ , toć  $a = 7$ ,  $c = 2304$ , założywszy więc te liczby za litery, będzie pomiar:  $x^4 - 98x^2 + 2401 = 2304$ , który oczywiſcie ieſt czworogranym naciągany i łatwo ſię zredukuje przez Przepis 1. Będzie bowiem naprzód, przenióſſszy wiado-

wiadome do wiadomych i odciągnąwszy:  $x^4 - 98x^2 = -97$ . Dodawszy zaś czworogran z połowy współczynnika 2go terminu zrobiony do obydwóch części, będzie:  $x^4 - 98x^2 + 2401 = 2401 - 97 = 2304$ . Wyciągnąwszy ścianę czworograną z obydwóch części przez § VI. i XI. będzie:  $x^2 - 49 = \pm \sqrt{2304} = \pm 48$ , czyli  $x^2 = 49 - 48 = 1$ ; z kądem powtórnie wyciągnąwszy tęż ścianę, będzie:  $x = 1$ . Więc  $a + x = 7 + 1 = 8$ ,  $a - x = 6$  części zapytane, których czworogranny 64 i 36 przez siebie rozmnożone = 2304. C. B. D. R.

*Zagadnienie 2gie.* Znaleść cztery liczby w ciągłej Arytmetycznej proporcji, któreby przez siebie rozmnożone uczyniły 100.

*Rezolucya.* Niech będzie przewyższka terminów proporcjonalnych Arytmetycznie =  $d$ , termin 1wszy =  $x$ , więc 2gi =  $x + d$ , 3ci =  $x + 2d$ , 4ty =  $x + 3d$ , które rozmnożone przez siebie dadzą pomiar czwartostopniowy:

$$x^4 + 6dx^3 + 11d^2x^2 + 6d^3x = 100.$$

$$\text{Albo: } x^4 + 6dx^3 + 11d^2x^2 + 6d^3x - 100 = 0.$$

Pomiar ten, zgubiwszy w nim termin 2gi to jest: przez § XXII. cenę  $x = z - \frac{3}{2}d$  wyniesioną do jednychże z  $x$  stopniów założywszy w nim za toż  $x$ , zamieni się w czworogranny naciągany:  $z^4 - \frac{5}{2}z^2d + \frac{9}{16}d^4 - 100 = 0$ , który się łatwo zredukuje przez Przepis 1. Jeżeli bowiem położymy  $d = 1$ , będzie:  $z^4 -$

$\frac{5}{2} z^2 = 99 + \frac{7}{15}$ ; a tego dopełniemy dodaniem czworogranu  $z = \frac{5}{4}$  zrobionego przez Przepis 5. § XVIII. będzie:  $z^4 = \frac{5}{2} z^2 + \frac{25}{15} = 99 + \frac{7}{15} + \frac{25}{15}$ , czyli  $z^4 = \frac{5}{2} z^2 + \frac{25}{15} = 101$ . Wyciągnąwszy zaś ścianę czworograną przez § VI, będzie:  $z^2 = \frac{5}{4} = \sqrt{101}$ , czyli:  $z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{101}$ , a wyciągnąwszy i ztąd też ścianę, będzie:  $z = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ . Lecz że za  $x$  założone  $z = \frac{3}{2} d$ , czyli że było  $x = z = \frac{3}{2} d$ , więc pierwszy termin szukany będzie:  $x = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2} \times 1$  czyli  $-\frac{3}{2}$ , drugi:  $x + d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2} \times 1 + 1$  czyli:  $-\frac{1}{2}$ , 3ci:  $x + 2d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2} \times 1 + 2$  czyli  $+\frac{1}{2}$ , 4ty na koniec  $x + 3d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2} \times 1 + 3$  czyli  $+\frac{3}{2}$ ; azatém produkt i-wszego rozmnożonego przez 4ty przez § XXXI. będzie:  $1 + \sqrt{101}$ , produkt zaś 2giego rozmnożonego przez 3ci będzie:  $+1 + \sqrt{101}$ , a te dwa produkta przez siebie znowu rozmnożone to jest:  $-1 + \sqrt{101} \times +1 + \sqrt{101} = 100$ . Albowiem  $\sqrt{101} = 10\sqrt{1}$ , drugie także  $\sqrt{101} = 10\sqrt{1}$  przez § XXIX, mnożąc zaś  $10\sqrt{1}$  przez  $10\sqrt{1}$ , będzie produkt  $= 100\sqrt{1}$ , mnożąc także doskonałą ilkość  $-1$  przez doskonałą  $+1$ , będzie podług przepisów mnożenia  $-1$ , a to redukując do ściennego mianownika, będzie

dzie-  
 m. 102  
 =  
 Z  
 który  
 porcy  
 więk  
 przew  
 do pr  
 Re  
 nych  
 1, a  
 3ciey  
 pomi  
 x<sup>2</sup> +  
 Cz  
 produ  
 dukto  
 czyli  
 rego  
 fanta  
 udają  
 na ta  
 wyższ  
 czwor  
 przyk  
 który  
 2x +  
 trzeba  
 grane  
 x —

dzie —  $\sqrt{1}$ , azatém ogólny produkt rozmnożonych przez siebie czworogranów będzie  $= 100\sqrt{1} - \sqrt{1} = 100$ . C. B. D. R.

*Zagadnienie 3cie.* Wynaleść trzy liczby, którychby czworograny były harmonicznie proporcjonalne, to jest: żeby czworogran największy tak się miał do najmniejszego, iako przewyżka między największym i średnim do przewyżki między średnim i najmniejszym.

*Rezolucya.* Niech będzie z liczb zapytanych 1wsza  $= 1$ , 2ga  $= x$ , toć 3cia  $= x \mp 1$ , a czworograny 1wszý: 1, 2giý:  $xx$ , 3ciý  $x^2 \mp 2x \mp 1$ , a z Warunków Zagadnienia pomiar:

$$x^2 \mp 2x \mp 1. 1 : : 2x \mp 1. xx \mp 1.$$

Czyli przez Zadan: V. Rozdz: III. Części I. produkt krajnych terminów będzie równy produktowi średnich:  $x^4 \mp 2x^3 - 2x - 1 = 2x \mp 1$ , czyli:  $x^4 \mp 2x^3 - 4x - 2 = 0$ , do którego redukcji użyć potrzeba sposobu od *Dyofanta* wynalezionego, ponieważ inne się nie udają; to jest: potrzeba pomiar ten obrócić na takie dwa czworograny, którychby przewyżka dodana do większego uczyniła także czworogran. Takimi czworogranami w tym przykładzie są 1wszy:  $x^2 \mp 2x \mp 1$ , 2gi:  $xx$ , których przewyżka  $2x \mp 1$  dodana do  $x^2 \mp 2x \mp 1$  daje summę:  $x^2 \mp 4x \mp 2$ . Ze zaś potrzeba: aby ta summa była także czworogranem, więc trzeba wziąć ścianę iaką np:  $x - 2$  i czworogran iéy:  $x^2 - 4x \mp 4$  zró-

M

wnać



wnać z rzeczoną summą, będzie:  $x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 2$ , czyli:  $x^2 + 4x + 2 = x^2 + 4x - 4 = 0$ , czyli  $8x - 2 = 0$ , czyli na koniec:  $8x = 2 = x = \frac{1}{4}$ . Więc rzeczona przewyżka dodana do większego czworogranu jest także czworogranem  $\frac{1}{4}$ , którą założywszy za  $x$  w obydwóch wzmiankowanych czworogranach, w i wżym:  $x^2 + 2x + 1$  i w 2gim:  $xx$ , będzie i wży:  $\frac{1}{16} + \frac{2}{4} + 1$ , 2gi:  $\frac{1}{16}$ , czyli i wży:  $\frac{25}{16}$ , 2gi:  $\frac{1}{16}$ , albo w liczbach całkowitych i wży: 25, 2gi: 1; których przewyżka 24 do większego dodana to jest: do 25 uczyni summę 49, która także czworogranem jest ściany 7. Będą tedy liczby harmonicznie proporcjonalne: 1,  $xx$ ,  $x^2 + 2x + 1 = 1$ ,  $xx$ , 25 $xx$ ; a zatem 25 $xx$ . 1 :: 24 $xx$ .  $xx = 1$ . Zrównawszy zaś produkt krajnych terminów z produktem średnich, będzie:  $25x^4 - 25x^2 = 24x^2$ , czyli wykładników przez 2 podzieliwszy:  $25x^2 - 25x = 24x$ , czyli:  $25x^2 = 24x + 25x = 49x$ , czyli:  $x^2 = \frac{49}{25}$ , więc  $25x^2 = \frac{25 \cdot 49}{25} = \frac{1225}{25}$ , a zatem liczby zapytane są 1,  $\frac{49}{25}$  i  $\frac{1225}{25}$ , albo całkowite: 1, 49, 1225. C. B. D. R.

*Prześtroga* 1. Gdyby za ścianę  $x = 2$ , z której czworogran  $\frac{1}{4}$  wypadł, wzięta była inna np:  $x = 3$ , albo  $x = 4$ , wynaydowałyby się coraz inne liczby harmonicznie proporcjonalne, byle tylko dwóch czworogranów przewyżka dodana do większego uczyniła także czworogran; inaczey Zagadnienie podobne nie mógłoby być rezolwowane. *Prze-*

*Przeestroga 2.* Można by przez Przepisy 2gi i 3ci ostatniego § rozliczne Zagadnienia Geometryczne rezolwować równie iako i niektóre między Przykładami Czworogrannych i Sześciogrannych Zagadnień wyżey położone, gdyby podniesione były do 4tego stopnia; lecz że pierwsze figur, drugie zaś długiego działania wyciągają, coby oboje i dzieła samego i kosztu bań znacznie powiększyło, dlatego się wzmiankowane Zagadnienia własne Czytelników zabawce zostawują.

*Przeestroga 3.* Tegowieczni Pisarze Algebry nie przestają na 4tym stopniu w swoich o niey pracowitych dziełach; idą iedni nad zgich wyżey mało bacznii nato: iż działania wyższostopniowe po nieskończenie długich i uprzykrzonych pracach równie szczupły iak pozny przynoszążytek i częstokroć kończą się na samych ogólnościach na pozór wiele, lecz w rzeczy samey bardzo mało co znaczących. Kto za niemi chce iść, niech ich samych bierze sobie za przewodników; jam tu kres pracy moiey założył, przestając na zdaniu JMć Pana *Saverien*, który pomiary 5tego i 6tego, atém bardziéy wyższych ielżczestopniów za zbyt wyśokie i ledwie nie przewyższające siły Algebrystów poczyta, a to, co się dotąd urobiło, porównywa do sztrabów wypuszczonych w niedokończonym murze, które czynią nadzieję: iż dalsza robota może się w czasie pociągnąć, i do dawnych wynalazków co no-

nowego się jeszcze przydać. *Les équations du cinquieme & du sixieme degré passent les efforts des Algebristes & ce qu'on a fait jusques aujourd'hui n'est qu'une pierre d'attente pour quelque decouverte, qu'on peut esperer sans s'en flatter.* Dictionaire Universel de Mathématique.

KONIEC CZĘŚCI DRUGIEY,  
i całego Dzieła.



RE-

# R E G E S T R

Rzeczy w Części Drugiéy zawartych.

Wstęp do téy części na karcie - - - 1.

## R O Z D Z I A Ł I.

O Rachunku Wykładniczym.

- §. I. Wykład wyrazów do zrozumienia téy Części potrzebnych. - - - 6
- II. Jak ilkość pojedyncza niższego stopnia wynosi się do wyższego? - 10
- III. Dwukrotną ilkość do danego stopnia wynieść. - - - 12
- IV. Ułożyć ogólne prawidło do wynieszenia ilkości wszelkich na wyższe stopnie. - - - 14

## R O Z D Z I A Ł II.

○ Wyciąganiu ścian, a naprzód o składzie i rozbiórze wyższych stopniów Algebraicznych.

- §. V. Jak wyciągnąć ścianę z danego stopnia ilkości pojedynczney? - 21
- VI. Gdy dany stopień jest w ilkości wielokrotnéy, iak z niego wyciągnąć ścianę czworogranną? - 21
- VII. Rozbiór sześciogranów i ścian ich wyciąganie. - - - 28
- VIII. Ogólne prawidło służące do wyciągania ścian z danych iakichkolwiek stopniów. - - - 34

§. IX.

- §. IX. Wyciąganie ścian z stopniów niedo-  
nałych przez przybliżanie. - - 36

### R O Z D Z I A Ł III.

#### O Wyciąganiu ścian z liczb pospolitych.

- §. X. Skład i rozbiór Czworogranów li-  
czbowych. - - - 41  
—IX. Jak się nyciąga ściana czworogranna  
z daney czworogrannéy liczby? - 51  
—XII. Skład i rozbiór sześciogranów li-  
czbowych. - - - 62  
—XIII. Jak się nyciąga ściana sześciogran-  
na z daney w trzecim stopniu li-  
czby? - - - 67  
—XIV. Z danéy liczby iakiegokolwiek by-  
też naywyższego stopnia nyciągnąć  
ścianę. - - - 84

### R O Z D Z I A Ł IV.

#### O Pomiarach składanych w ogólności.

- §. XV. Wykład potrzebniejszych wyrazów. 89  
—XVI. Jakim porządkiem układać terminy  
pomiaru składanego? - 91  
—XVII. Jakie są pomśzechniejsze sposoby  
redukowania pomiarów składanych? 93

### R O Z D Z I A Ł V.

#### O Pomiarach czworogrannych.

- §. XVIII. Przepisy na rezolwowanie Proble-  
matów czworogrannych. - 98  
Przy-



## ROZDZIAŁ VI.

O Pomiarach Sześciogrannych i ich redukcji.

- §. XIX. Skład wewnętrzny tych pomiarów. 130  
 — XX. Ściany Sześciogranne i inne wyż-  
     szostopniowe. 131  
 — XXI. Zamiana ścian rzetelnych w nie-  
     rzetelne i przecinanie, tudzież zwię-  
     kszenie ich lub zmniejszenie. 133  
 — XXII. Rugowanie terminu iakiego z po-  
     miaru i dopełnienie iego. 134  
 — XXIII. O redukcji pomiarów sześcio-  
     grannych. 136  
 — XXIV. O dalszém redukcji. 137  
 — XXV. O dokończeniu téż redukcji. 141  
 — XXVI. O innym sposobie rzeczzonego do-  
     kończenia. 143  
 Przykłady Zagadnień i redukcji po-  
     miarów sześciogrannych. 145

## ROZDZIAŁ VII.

O Rachunku Sciennym czyli Radykalnym.

- §. XXVII. Potrzebniejszy o Rachunku tym  
     wiadomości. 157  
 — XXVIII. Jak ściennie ilkości obrócić do  
     iednego mianownika? 159  
 — XXIX. Jak ie redukować, czyli na  
     prostsze obracać? 160

§. XXX.

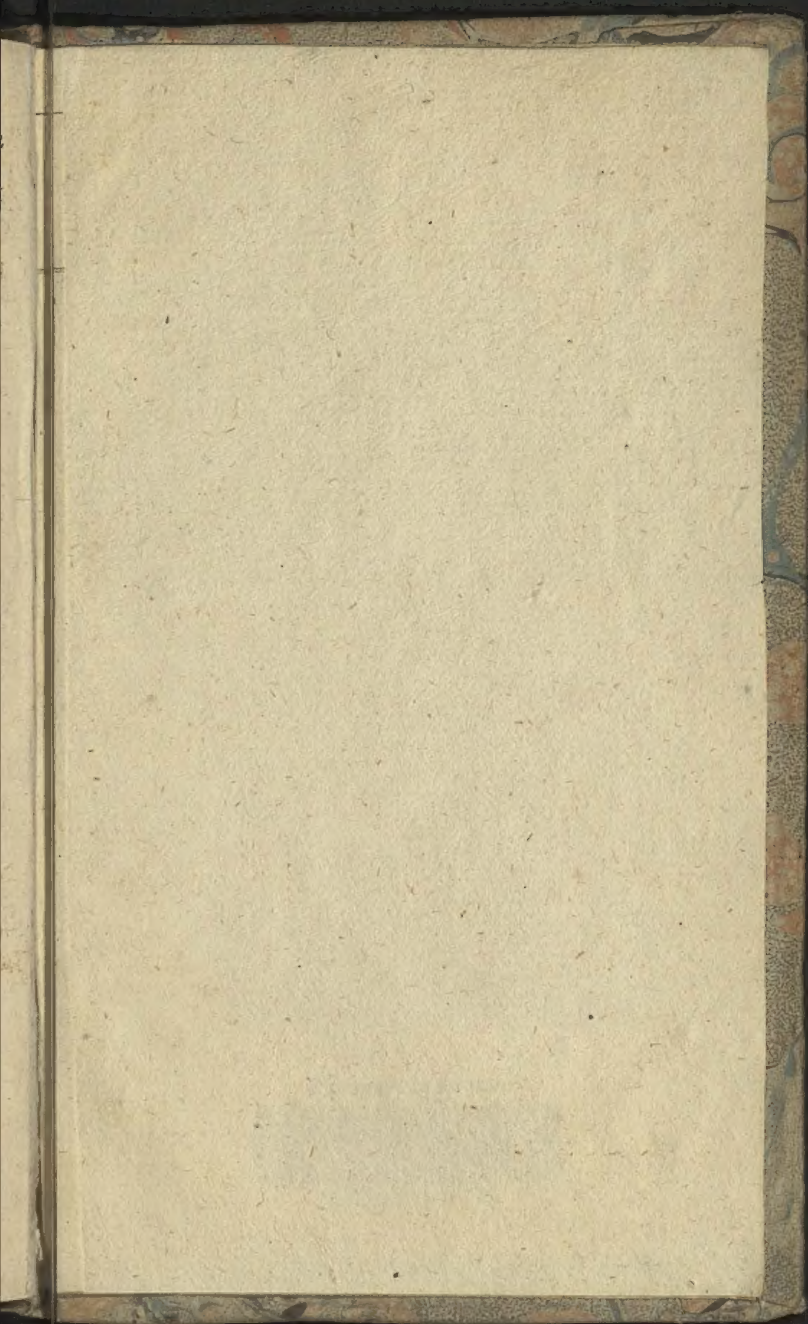
§. XXX. Dodawanie i odciąganie ilkości ściennych.	162
— XXXI. Mnożenie i dzielenie tychże ilkości.	163
— XXXII. Wynieść ilkość ścienną do danego stopnia.	164
— XXXIII. Wyciągnąć ścianę czworokrotną z ilkości ściennéj.	165
— XXXIV. Wyciągnąć ścianę sześciokrotną z téjże ilkości.	167

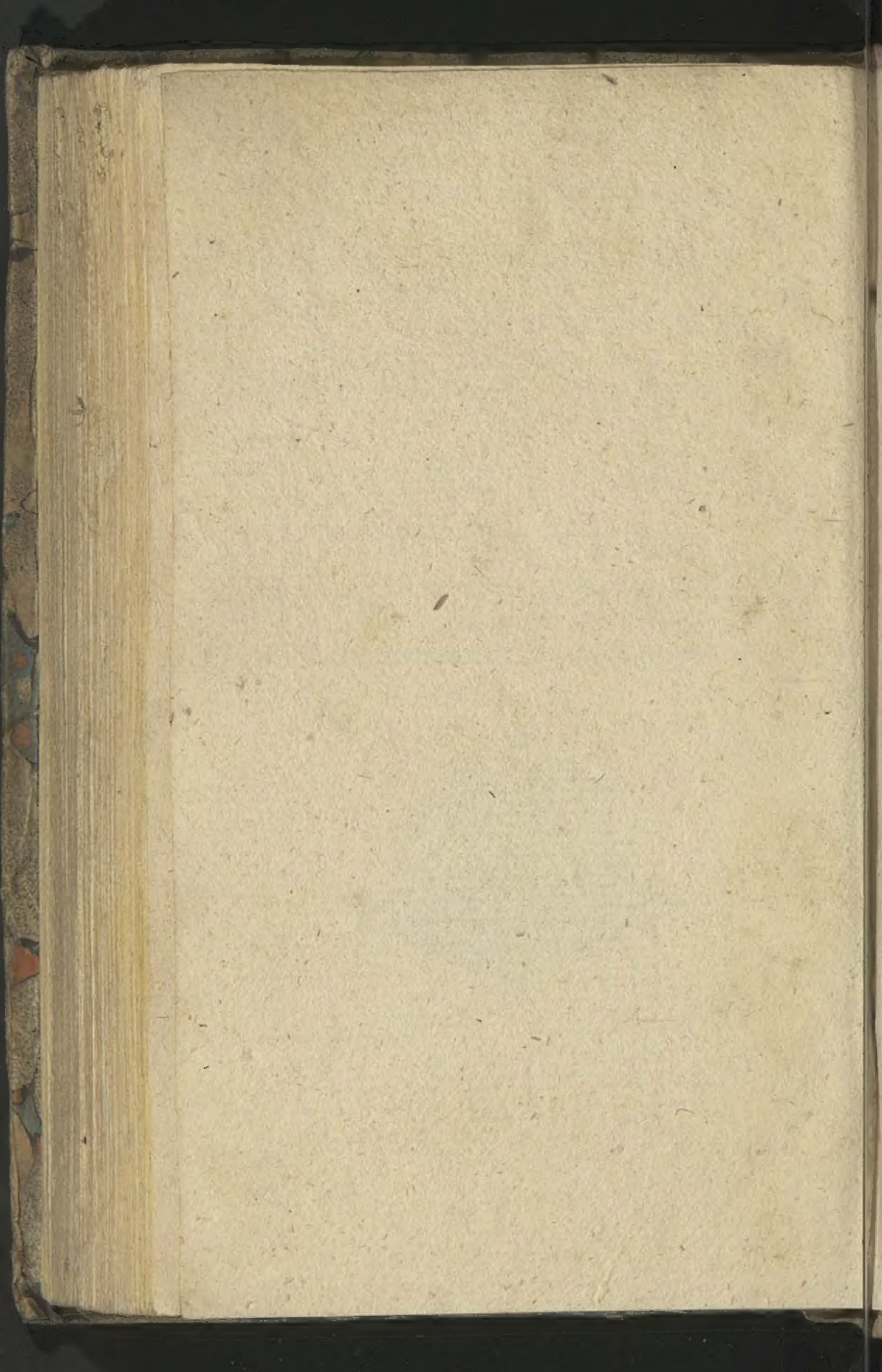
## R O Z D Z I A Ł VIII.

### O Pomiarach Czwartostopniowych.

§. XXXV. Jak się redukują Pomiaru dwuczworokrotne czyli czwartostopniowe?	170.
Przykłady Pomiarów czwartostopniowych.	174.









Biblioteka Jagiellońska



stdr0017308



